



درس معادلات دیفرانسیل
نیم‌سال دوم ۰۳-۰۴
استاد: دکتر قاجار، دکتر گاذری

تمرین سری چهارم

دانشکده علوم ریاضی

۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y - ty^x}{t + t^x y} \quad t > 0.$$

۲. فرض کنید معادله دیفرانسیل $y' = f(t, y)$ در قضیه وجود و یکتایی صدق می‌کند و $f(t, 0) = 0$. همچنین فرض کنید y یک جواب این معادله دیفرانسیل است، به طوری که $y(t) = 0$ برای $t \in R$. آنگاه ثابت کنید که برای هر $t \in R$ داریم $y(t) = 0$.

۳. الف) به فرض تابع‌های y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جواب‌های معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ را تشکیل بدهند که در آن p و q توابعی پیوسته هستند. ثابت کنید بین هر دو ریشه متوالی y_1 ، یک و تنها یک ریشه از y_2 وجود دارد.
ب) آیا معادله دیفرانسیل خطی و همگن از مرتبه دو وجود دارد که e^t و $1 - t^2$ جواب‌های آن باشند؟ اگر جواب مثبت است این مطلب چگونه با قسمت قبل در تناقض نمی‌باشد؟

۴. آیا $y = \sin t^2$ می‌تواند جواب معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ با ضرایب پیوسته در بازه‌ای شامل $t = 0$ باشد؟

۵. الف) اگر $W(f, g)(t) = 2e^{3t}$ باشد که در آن $f = e^{3t}$ است. تابع g را محاسبه کنید.

ب) اگر y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جواب‌های معادله دیفرانسیل $ty'' + 2y' + te^t y = 0$ را تشکیل بدهند و اگر $W(y_1, y_2)(1) = 3$ آنگاه مقدار $W(y_1, y_2)(5)$ را بیابید.

۶. فرض کنید $y_1(t)$ و $y_2(t)$ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + py' + qy = 0$ برای $-\infty < t < \infty$ است. اگر $y_2(0) = 1$ ، $y_1(0) = 3$ ، $y_1'(0) = 1$ و $y_2'(0) = \frac{1}{3}$ آنگاه نشان دهید $y_1(t)$ و $y_2(t)$ بر بازه $-\infty < t < \infty$ وابسته خطی هستند.

۷. فرض کنید که $p(t)$ و $q(t)$ توابعی پیوسته روی بازه I باشند و $y_1(t)$ و $y_2(t)$ جواب‌های معادله دیفرانسیل $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ روی این بازه هستند.

الف) ثابت کنید اگر y_1 و y_2 نقطه ماکزیمم و یا مینیمم مشترک در نقطه‌ای از I داشته باشند، آنگاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جواب‌ها را تشکیل دهند.

ب) ثابت کنید اگر y_1 و y_2 نقطه عطف مشترک در $t \in I$ داشته باشند آنگاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جواب‌ها در آن بازه باشند مگر اینکه p و q هر دو در t صفر باشند.