

به نام خدا



درس معادلات دیفرانسیل
نیمسال دوم ۰۴-۰۳
استاد: دکتر قاجار، دکتر گاذری

تمرین سری اول

دانشکده علوم ریاضی

۱. جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{dy}{dt} + y\sqrt{t} \sin t = 0$$

$$\text{ب) } \frac{dy}{dt} + \frac{2t}{1+t^2}y = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\text{ج) } \frac{dy}{dt} + t^2y = t^2$$

$$\text{د) } \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y+yt^2}$$

۲. جواب مساله مقدار اولیه در هر قسمت را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \frac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2}e^{-t}y = 0 \quad y(0) = 0$$

$$\text{ب) } (1+t^2)\frac{dy}{dt} + 4ty = t \quad y(1) = \frac{1}{4}$$

$$\text{ج) } (1+t^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dt} = ty^3(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} \quad y(0) = 1$$

۳. مقدار y را طوری بیابید که جواب مساله مقدار اولیه

$$y' - y = 1 + 3 \sin t, \quad y(0) = y_0$$

وقتی $t \rightarrow \infty$ کراندار باقی بماند.

۴. مساله مقدار اولیه

$$y' - \frac{3}{4}y = 3t + 2e^t, \quad y(0) = y_0$$

را در نظر بگیرید. مقدار y را طوری بیابید که جوابهایی را که وقتی $t \rightarrow \infty$ به طور مثبت رشد می کنند از آنها که به طور منفی رشد می کنند جدا کند. جواب متناظر مقدار بحرانی y وقتی $t \rightarrow \infty$ چگونه رفتار می کند؟

۵. مساله مقدار اولیه $y' + p(t)y = t$, $y(0) = 1$ را در نظر بگیرید که در آن

$$p(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & 1 < t \end{cases}$$

است. جواب پیوسته این مساله مقدار اولیه را، روی تمام اعداد حقیقی مثبت بیابید (دقت کنید چنین جوابی در تمام نقاط دارای مشتق نیست).

۶. نشان دهید هر جواب معادله

$$\frac{dy}{dt} + ay = be^{-ct}$$

که در آن a و c اعداد حقیقی مثبت و b عدد حقیقی دلخواهی هستند، در بینهایت به صفر میل می‌کند.

۷. معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t)$ مفروض است که توابع $a(t)$ و $f(t)$ بر روی کل بازه حقیقی پیوسته هستند. اگر داشته باشیم $a(t) \geq c > 0$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ آنگاه نشان دهید هر جواب در بی‌نهایت به سمت صفر می‌رود.