

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۰۴-۰۳
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی
تمرین سری هفتم
دانشکده علوم ریاضی

۱. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، کوتاهترین فاصله بین دو خط راست $x = y = z$ و $x = -y, z = 2$ را بیابید. (البته روش‌های ساده‌تری برای رسیدن به پاسخ وجود دارد. این تمرین مثالی است از شلیک به گنجشک با توپ!)

۲. (آ) مقادیرهای بیشینه و کمینه عبارت $xy + z^2$ را روی کره $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ بیابید. برای بررسی حالت مرزی از روش لاگرانژ استفاده کنید.

(ب) قسمت (آ) را دوباره حل کنید، اما حالت مرزی را با پارامتری‌سازی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ بررسی کنید. پارامترها را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x = \sin \phi \cos \theta, \quad y = \sin \phi \sin \theta, \quad z = \cos \phi,$$

که در آن:

$$0 \leq \phi \leq \pi \quad \text{و} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

۳. انتگرالهای مکرر زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 dy \int_0^y (xy + y^2) dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^\pi dx \int_{-x}^x \cos y dy \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^2 dy \int_0^y y^2 e^{xy} dx \quad (\text{ج})$$

۴. انتگرالهای زیر را روی نواحی داده شده محاسبه کنید.

(آ) $\iint_T (x + y) dA$ که در آن T متوازی‌الاضلاع با رأس‌های $(2, 2)$ ، $(1, -1)$ ، $(-2, -2)$ و $(-1, 1)$ است.

$$\iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^3 \cos(y^2) + 3 \sin y - \pi) dA \quad (\text{ب})$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (a - \sqrt{x^2 + y^2}) dA \quad (\text{ج})$$

(د) $\iint_R xy^2 dA$ که در آن R ناحیه‌ای محدود در ربع اول است که بین منحنی‌های $y = x^2$ و $x = y^2$ قرار دارد.

(ه) $\iint_D x \cos y dA$ که در آن D ناحیه‌ای در ربع اول بین محورهای مختصات و منحنی $y = 1 - x^2$ است.

(و) $\iint_R \frac{x}{y} e^y dA$ که در آن R ناحیه‌ای با دامنه‌های $0 \leq x \leq 1$ و $x^2 \leq y \leq x$ است.

(ز) $\iint_T \frac{xy}{1+x^2} dA$ که در آن T مثلثی با رأس‌های $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(1, 1)$ است.

۵. ناحیه انتگرالگیری را ترسیم کرده و سپس انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^1 dx \int_x^{x^{1/3}} \sqrt{1-y^4} dy \quad (\text{ج})$$

۶. فرض کنید $F'(x) = f(x)$ و $G'(x) = g(x)$ روی بازه $a \leq x \leq b$ تعریف شده‌اند. مثلث T را با رأس‌های (a, a) ، (b, a) و (b, b) در نظر بگیرید. با انتگرال‌گیری مکرر انتگرال دوگانه $\iint_T f(x)g(y) dA$ در هر دو جهت، نشان دهید که:

$$\int_a^b f(x)G(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b g(y)F(y) dy$$

(این روشی جایگزین برای استخراج فرمول انتگرال‌گیری جز به جز است.)