به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۲ ..... نیمسال دوم ۰۳-۰۴
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی
تمرین سری ششم
دانشکده علوم ریاضی

---

۱. در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - 2xy^2 \end{cases}$$

برای مقادیر (x, y) نزدیک به $(1, 2)$ و مقادیر (u, v) نزدیک به $(5, -7)$.

الف) $\frac{\partial y}{\partial u}$ و $\frac{\partial x}{\partial u}$ را در نقطه $(u, v) = (5, -7)$ بیابید.

ب) اگر $z = \ln(y^2 - x^2)$ باشد، $\frac{\partial z}{\partial u}$ را در $(u, v) = (5, -7)$ محاسبه کنید.

۲. نشان دهید که در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} xe^y + uz - \cos v = 2 \\ u \cos y + x^2 v - yz^2 = 1 \end{cases}$$

می‌توان u و v را به صورت توابعی بر حسب x، y و z، در نزدیکی نقطه P_0 که در آن $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ و $(u, v) = (1, 0)$، نوشت و سپس مشتق $(\partial u/\partial z)_{x,y}$ را در نقطه $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ بیابید.

۳. اگر $F(x, y, z) = 0$ مقدار z را به صورت تابعی از x و y تعیین کند، مشتقات دوم $\partial^2 z/\partial x^2$، $\partial^2 z/\partial x \partial y$، و $\partial^2 z/\partial y^2$ را برحسب مشتقات جزئی تابع F محاسبه کنید.

۴. اگر $F(x, y, z) = 0$، نشان دهید که:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

۵. اگر معادلات $F(x, y, u, v) = 0$ و $G(x, y, u, v) = 0$ برای x و y به صورت توابعی از u و v حل شده باشند، نشان دهید که:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \Big/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}.$$

۶. اگر معادلات $x = f(u, v)$، $y = g(u, v)$ برای u و v به صورت توابعی از x و y حل شده باشند، نشان دهید که:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\partial(x, y)/\partial(u, v)}.$$

۷. در قسمت های الف و ب، نشان دهید که برای x نزدیک به نقطه مشخص‌شده یعنی $x = a$، معادله داده‌شده دارای پاسخی به فرم $y = f(x)$ است، به طوری که مقدار مشخص‌شده در آن نقطه را می گیرد. سپس سه جملهٔ اول غیر صفر از سری تیلور $f(x)$ را نسبت به $x - a$ پیدا کنید.

الف. $x \sin y = y + \sin x,$ نزدیک $x = ۰,$ $f(۰) = ۰$

ب. $\sqrt{۱ + xy} = ۱ + x + \ln(۱ + y),$ نزدیک $x = ۰,$ $f(۰) = ۰$

۸. سه نقطه بحرانی تابع لاگرانژ زیر را پیدا کرده و آن‌ها را طبقه‌بندی کنید:

$$L(x, y, u, v, \lambda, \mu) = S + \lambda(y - x^۲) + \mu(v - ۲u^۲ - ۱)$$

که متناظر با مسئله زیر است:

بیشینه یا کمینه کنید $S = (x - u)^۲ + (y - v)^۲$

با شرط $v = ۲u^۲ + ۱$ و $y = x^۲$

کمترین فاصله بین دو منحنی $y = x^۲$ و $y = ۲x^۲ + ۱$ چقدر است؟

۹. با استفاده از ضرایب لاگرانژ، ماکزیمم و مینیمم مقدار $xy + z^۲$ را روی کره توپرِ واحد بدست آورید.