به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۲ ..... نیمسال دوم ۰۴-۰۳
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرینات سری سوم

تمرین ۱ اگر بردارهای موضع و سرعت یک ذره متحرک همواره بر هم عمود باشند، نشان دهید که مسیر ذره روی یک کره قرار دارد.

تمرین ۲ خم پارامتری $r(t) = t\cos ti + t\sin tj + (۲\pi - t)k \quad (۰ \leq t \leq ۲\pi)$ را توصیف کنید، سپس طول آن را محاسبه کنید.

تمرین ۳ برای خم $\mathcal{C}$ دو پارامتری‌سازی $\mathbf{r} = \mathbf{r}_۱(t)$، $a \leq t \leq b$ و $\mathbf{r} = \mathbf{r}_۲(u)$، $c \leq u \leq d$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که هر دو در دامنه‌شان یک به یک و هم‌جهت هستند. به‌علاوه، فرض کنید $\mathbf{r}_۱(a) = \mathbf{r}_۲(c)$ و $\mathbf{r}_۱(b) = \mathbf{r}_۲(d)$. لذا، برای هر $t \in [a,b]$، $u = u(t) \in [c,d]$ به طور یکتا یافت می‌شود. ثابت کنید:

$$\int_a^b \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_۱(t)\right| \mathrm{d}t = \int_c^d \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathbf{r}_۲(u)\right| \mathrm{d}u,$$

و نتیجه بگیرید که طول خم C مستقل از نوع پارامتری‌سازی است.

تمرین ۴ فرض کنید که خم C داری سرعت پیوسته و ناصفر $\mathbf{v}(t)$ برای هر $t \in [a,b]$ باشد. نشان دهید که تابع

$$s = g(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(u)| \mathrm{d}u$$

روی $[a,b]$ صعودی اکید و درنتیجه وارون‌پذیر است و

$$t = g^{-۱}(s) \Leftrightarrow s = g(t).$$

بنابراین، نشان دهید که خم را می توان بر حسب طول قوس پارامتری کرد.

تمرین ۵ نشان دهید که اگر حاصل‌ضرب نقطه‌ای سرعت و شتاب یک ذره متحرک مثبت (یا منفی) باشد، تندی ذره صعودی (یا نزولی) است.

تمرین ۶ مماس، قائم، قائم دوم یکه و نیز انحنا و تاب منحنی

$$\mathbf{r} = \sin t \cos t\mathbf{i} + \sin^{۲} t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k},$$

را در نقاط (i) $t = ۰$ و (ii) $t = \pi/۴$ بیابید.

تمرین ۷ نشان دهید که انحنای نمودار قطبی مسطح $r = f(\theta)$ در نقطه کلی θ مساوی است با

$$\kappa(\theta) = \frac{|۲\big(f'(\theta)\big)^{۲} + \big(f(\theta)\big)^{۲} - f''(\theta)f(\theta)|}{\Big[\big(f'(\theta)\big)^{۲} + \big(f(\theta)\big)^{۲}\Big]^{۳/۲}}.$$