به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۲ ..... نیمسال دوم ۰۴-۰۳
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی
تمرین سری دوم
دانشکده علوم ریاضی

---

۱. برای ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نشان دهید که:

- الف) دترمینان ماتریس A برابر حاصل‌ضرب مقادیر ویژه آن ماتریس است. (راهنمایی: توجه کنید که $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ یک چندجمله ای درجه n است که ضریب λ^n در آن برابر $(-1)^n$ است). نشان دهید که $p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda_j - \lambda)$ که در آن λ_j ها مقادیر ویژه ماتریس A هستند.
- ب) ماتریس A وارون پذیر است اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس A ناصفر باشند
- ج) اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس وارون پذیر A باشد آنگاه $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه ماتریس A^{-1} است.
- د) مقادیر ویژه ماتریس A^T همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

۲. نشان دهید که اگر $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد که $a_{ij} = 0$ برای $i > j$ (ماتریس A بالامثلثی باشد)، داریم:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$$

یعنی دترمینان ماتریس A برابر حاصل‌ضرب عناصر روی قطر اصلی A است.

۳. نشان دهید که:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x,$$

و

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

سعی کنید این نتیجه را به حالت $n \times n$ تعمیم دهید.

۴. در هر کدام از قسمت‌های زیر، موقعیت مکانی یک ذره در لحظه t داده شده است. مسیر حرکت ذره را توصیف کنید. همچنین، سرعت، تنش و شتاب ذره را در لحظه t محاسبه کنید.

- الف) $\mathbf{r} = t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
- ب) $\mathbf{r} = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$
- ج) $\mathbf{r} = a\cos\omega t\mathbf{i} + b\mathbf{j} + a\sin\omega t\mathbf{k}$
- د) $\mathbf{r} = at\cos\omega t\mathbf{i} + at\sin\omega t\mathbf{j} + b\ln t\mathbf{k}$

- ه) $\mathbf{r} = e^{-t}\cos(e^t)\mathbf{i} + e^{-t}\sin(e^t)\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$

۵. اشتراک صفحه $z = ۱ + x$ با مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ سهموی است. این سهموی را به سه روش پارامتری کنید. (هر بار هرکدام از متغیرها رابرابر با t بگیرید). کدام یک از این انتخاب‌ها برای t منجر به پارامتری سازی می شود که نمایانگر کل سهموی است؟ آن پارامتری سازی چیست؟ چه اتفاقی برای دو انتخاب دیگر میافتد؟

۶. در قسمت‌های زیر فرض کنید که توابع برداری داده شده از هر مرتبه‌ای مورد نیاز مشتق پذیر پیوسته هستند.

- الف) ثابت کنید : $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^۲\mathbf{u}}{dt^۲}\right) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^۳\mathbf{u}}{dt^۳}$
- ب) عبارت $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}))$ را بسط دهید.
- ج) عبارت $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}))$ را بسط دهید.

۷. برای کدام مقادیر از λ طول $\mathbf{s}(\mathbf{T})$ که بیانگر طول خم

$$r(t) = t\mathbf{i} + \lambda t^۲\mathbf{j} + t^۳\mathbf{k}; ۰ \leq t \leq T$$

می‌باشد. برابر $s(T) = T + T^۳$ می‌شود؟

۸. خم‌های زیر را بر حسب طول خم پارامتری سازی کنید.

- الف) $r(t) = e^t\mathbf{i} + \sqrt{۲}t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$
- ب) $r(t) = a\cos^۳ t\mathbf{i} + a\sin^۳ t\mathbf{j} + b\cos ۲t\mathbf{k}; ۰ \leq t \leq \pi/۲$
- ج) $r(t) = ۳t\cos t\mathbf{i} + ۳t\sin t\mathbf{j} + ۲\sqrt{۲}t^{۳/۲}\mathbf{k}$