

به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۲
نیمسال دوم ۰۴-۰۳

استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین سری اول

۱. مجموعه نقاطی از فضای \mathbb{R}^3 که در معادلات یا نامعادلات زیر صدق می‌کند توصیف کنید و در صورت امکان آن را رسم کنید.

• الف) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$

• ب) $x \geq \sqrt{y^2 + z^2}$

• ج) $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

• د) $z \geq x$ و $x^2 + z^2 \leq 1$

• ه) $z = y$ و $x^2 + y^2 = 1$

۲. برای دو بردار $u, v \in \mathbb{R}^3$ که هم‌راستای یکدیگر نیستند، مجموعه‌های زیر را با دلیل به صورت هندسی توصیف کنید.

• الف) $\{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

• ب) $\{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \geq 0\}$

• ج) $\{\lambda u + (1-\lambda)v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

• د) $\{\lambda u + (1-\lambda)v \mid \lambda \geq 0\}$

• ه) $\{\lambda u + (1-\lambda)v \mid \lambda \in [0, 1]\}$

• و) $\{\lambda u + \mu v \mid \lambda + \mu \leq 1, \lambda, \mu \geq 0\}$

۳. معادله صفحه گذرنده از نقطه $(2, 0, -1)$ و گذرنده از فصل مشترک دو صفحه $2x + 3y - z = 0$ و $x - 4y + 2z = 5$ را بیابید.

۴. زاویه میان خطوط زیر را بدست آورید.

$$L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{-z-3}{3}$$

$$L_2: -x-2 = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$$

۵. برای سه بردار $u = 2i + j - 2k$ و $v = i + 2j - 2k$ و $w = 2i - 2j + k$ ، به موارد زیر پاسخ دهید:

۱. دو بردار یکه عمود بر هر دو بردار u و v عمود باشد را بیابید.

۲. بردار $x \in \mathbb{R}^3$ را چنان بیابید که:

$$x \cdot u = 9,$$

$$x \cdot v = 4,$$

$$x \cdot w = 6.$$

۳. دو بردار یکه را چنان بیابید که زاویه‌ی برابر با بردارهای u ، v و w داشته باشند.

۴. بردار یکه ای که نیمساز زاویه‌ی بین دو بردار u و v باشد را معرفی کنید.

۶. برای اعداد حقیقی r, s, t که $r \neq 0$ ، $s \neq 0$ و بردار a صادق در شرط $|a|^2 \geq 4rst$ بردارهای x و y را چنان بیابید که

$$\begin{cases} rx + sy = a, \\ x \cdot y = t. \end{cases}$$

۷. فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_k و B نقاطی از \mathbb{R}^n باشند. ثابت کنید اگر $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی باشد و $\{A_1 + B, A_2, \dots, A_k\}$ مجموعه‌ای وابسته خطی، آنگاه $\{A_1 - B, A_2, \dots, A_k\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی است.

۸. یک چهاروجهی هرمی است با قاعده مثلثی و سه وجه مثلثی دیگر. چهاروجهی دارای چهار رأس و شش ضلع است. حجم آن مانند هرم یا مخروط مساوی با $\frac{1}{3}Ah$ است، که در آن A مساحت قاعده و h ارتفاع عمود بر قاعده می‌باشد. اگر u, v, w بردارهای منطبق بر سه ضلع چهاروجهی باشند که در یک رأس متقاطع‌اند، نشان دهید که چهاروجهی دارای حجم زیر است:

$$\frac{1}{6} |u \cdot (v \times w)| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$