به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی عمومی یک نیمسال ۱۴۰۳۲ **تمرین سری اول**

---

۱. ثابت کنید مجموعه $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^{۲} < ۳\}$ در اعداد گویا سوپریمم (کوچکترین کران بالا) ندارد.

۲. فرض کنید a، b و c سه عدد مختلط روی دایره واحد باشند و $a+b+c=۰$. ثابت کنید a، b و c رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع هستند.

۳. هرگاه $z_{۱}$، $z_{۲}$ و $z_{۳}$ سه عدد مختلط ناصفر باشند به طوری که $|z_{۱}|=|z_{۲}|=|z_{۳}|$ و $z_{۱}+z_{۲}+z_{۳}=۰$، نشان دهید $\frac{۱}{z_{۱}}+\frac{۱}{z_{۲}}+\frac{۱}{z_{۳}}=۰$ و $z_{۱}^{۲}+z_{۲}^{۲}+z_{۳}^{۲}=۰$.

۴. ثابت کنید شزط لازم و کافی برای اینکه سه عدد مختلط متمایز a، b و c در صفحه، یک مثلث متساوی الاضلاع تشکیل دهند این است که $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=ab+bc+ac$.

راهنمایی: از اتحاد $(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab+۲bc+۲ac$ و تمرین ۲ استفاده کنید.

۵. فرض کنید $z_{۱}$ و $z_{۲}$ دو عدد مختلط باشند. ثابت کنید

$$|۱-\bar{z}_{۱}z_{۲}|^{۲}-|z_{۱}-z_{۲}|^{۲}=(۱-|z_{۱}|^{۲})(۱-|z_{۲}|^{۲}).$$

۶. فرض کنید $z_{۱}$ و $z_{۲}$ دو عدد مختلط باشند به طوری که $|z_{۱}|=|z_{۲}|=۱$ و $z_{۱}z_{۲}\neq -۱$. ثابت کنید $\frac{z_{۱}+z_{۲}}{۱+z_{۱}z_{۲}}$ عددی حقیقی است.

۷. اگر تمام ضرایب چند جمله ای $P_n(z)=a_nz^n+\cdots+a_{۱}z+a_{۰}$ در اعداد حقیقی باشند و $a_n\neq ۰$، نشان دهید برای هر جواب z از معادله $P_n(z)=۰$، $\bar{z}$ نیز جواب است. سپس با کمک گرفتن از قضیه اساسی جبر (هر چندجمله ای حتی با ضرایب مختلط، در اعداد مختلط ریشه دارد) نشان دهید که هر چندجمله با ضرایب حقیقی و با درجه فرد، حتما یک ریشه حقیقی دارد.

۸. اگر معادله $z^{۱۰}+(z-۱)^{۱۰}=۰$ دارای ۱۰ ریشه مختلط $z_{۱}$، $\bar{z}_{۱}$، $z_{۲}$، $\bar{z}_{۲}$، $\ldots$، $z_{۵}$ و $\bar{z}_{۵}$ باشد، مجموع زیر را بیابید

$$\Sigma_{j=۱}^{۵}\frac{۱}{z_j\bar{z}_j}.$$

راهنمایی: از ارتباط بین انواع حاصل ضربها بین ریشه ها و ضرایب معادله جبری اش استفاده کنید.

۹. فرض کنید a، b و c سه عدد صحیح باشند به طوری که $abc = ۶۰$ و $\omega \neq ۱$ عددی مختلط باشد که $\omega^۳ = ۱$. مینیمم مقدار $|a + b\omega + c\omega^۲|$ را به دست آورید.

۱۰. (آ) عبارت $\dfrac{۱ + \sin\theta + i\cos\theta}{۱ + \sin\theta - i\cos\theta}$ را به صورت $a + bi$ درآورید و به کمک آن حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\left(۱ + \sin\frac{\pi}{۵} + i\cos\frac{\pi}{۵}\right)^۵ + i\left(۱ + \sin\frac{\pi}{۵} - i\cos\frac{\pi}{۵}\right)^۵$$

(ب) حاصل عبارت زیر را به ازای n های طبیعی بزرگ‌تر از ۱ به دست آورید (α عددی حقیقی است).

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{۲\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\alpha + \frac{۲(n-۱)\pi}{n}\right)$$

راهنمایی: میتوانید از خواص جوابهای یک معادله جبری در اعداد مختلط استفاده کنید و یا با ضرب و تقسیم کردن عبارت مورد نظر در $۲\sin(\beta)$ برای β مناسب، از اتحادهای تبدیل حاصلضرب به مجموع در توابع مثلثاتی بهره ببرید.

۱۱. فرض کنید $c_۰, c_۱, \ldots, c_{n-۱}$ اعدادی مختلط باشند. ثابت کنید ریشه‌های چندجمله‌ای $z^n + c_{n-۱}z^{n-۱} + \cdots + c_۱z + c_۰$ در دایره‌ای به مرکز ۰ و شعاع $\sqrt{۱ + |c_{n-۱}|^۲ + \cdots + |c_۱|^۲ + |c_۰|^۲}$ قرار دارند.

۱۲. با ابزارهای اعداد مختلط قرینه نقطه $z = x + yi$ را نسبت به خط $ax + by + c = ۰$ به صورت $u(x,y) + iv(x,y)$ بیابید.

۱۳. در هرمورد مکان هندسی نقاطی را توصیف کنید که در رابطه داده شده صدق می‌کند.

(آ) $\mathrm{Re}(z^۲) = \mathrm{Im}(z^۲)$

(ب) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z+۱}{z-۱}\right) \leq ۲$

(ج) $|z + ۴i| + |z - ۴i| = ۱۰$

۱۴. تعریف میکنیم

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{۲}\ ,\ \cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{۲}\ ,\ \tanh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$
$$\coth(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}\ ,\ \mathrm{sech}(z) := \frac{۱}{\cosh(z)}\ ,\ \mathrm{csch}(z) := \frac{۱}{\sinh(z)}$$

این توابع را توابع هذلولوی (به جای مثلثاتی) گویند. برای مثال سینوس هذلولوی. تمام روابط مثلثاتی اصلی که برای توابع مثلثاتی داشتیم را برای این توابع بررسی کنید. روابطی مانند ارتباط بین سینوس به توان دو و کوسینوس به توان دو، به دست آوردن فرمولی در مورد $\sinh(x+y)$ و دیگر توابع هذلولوی، مشابه فرمول طلایی و دیگر روابط معمول و مهم که در مثلثات مقدماتی دیده ایم.

۱۵. بنا به تعریف توان برای اعداد مختلط داریم $e^{x+iy} := e^x(\cos y + i\sin y)$. سپس مشاهده کنید که این تعریف حالت کلی از $e^{i\alpha} := \cos\alpha + i\sin\alpha$ موسوم به فرمول اویلر است. با استفاده از فرمول اویلر نشان دهید که

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{۲i} \quad , \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{۲}$$

با توجه به تعریف ابتدای سوال و الهام گرفتن از تعریف توابع هذلولوی در تمرین ۱۴ تعریفی برای توابع مثلثاتی با ورودی مختلط ارائه کنید که حالت حقیقی را نیز دربرگیرد. ارتباط توابع هذلولوی با توابع مثلثاتی با ورودی مختلط چیست؟

۱۶. معادله $ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$ را با تغییر متغیری مناسب به معادله‌ای به صورت $X^۳ + pX + q = ۰$ تبدیل کنید.

۱۷. به ازای چه مقدار A در عبارت $X = A\cos\alpha$ برای حل معادله درجه سه $X^۳ + pX + q = ۰$، می‌توان از $\cos(۳\alpha)$ استفاده کرد؟ با استفاده از آن معادله درجه سوم مذکور را حل کنید. آیا این روش همیشه کاراست؟

۱۸. معادله $X^۳+pX+q = ۰$ را در نظر بگیرید. اگر $X = u+v$ ریشه این معادله باشد داریم $(u+v)^۳+p(u+v)+q = ۰$ و به صورت معادله $u^۳ + v^۳ + (۳uv + p)(u + v) + q = ۰$. اگر شرط $۳uv + p = ۰$ را اضافه کنیم، به دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر می‌رسیم:

$$u^۳ + v^۳ = -q$$
$$u^۳ v^۳ = -\frac{p^۳}{۲۷}.$$

با یافتن u, v و توجه به برابری $۳uv + p = ۰$، معادله درجه سوم مذکور را حل کنید. آیا این روش همیشه کاراست؟

۱۹. ارتباط بین جواب هایی که در پاسخ سوال ۱۷ و سوال ۱۸ به‌دست آوردید چیست؟