

# ریاضی مهندسی

## مسائل کلاس تمرین (هفته‌ی دوم)

نیمسال دوم ۱۴۰۴-۱۴۰۳

۱. اگر  $u(x, y) = 2x(1 - y)$  قسمت حقیقی تابع تحلیلی  $f(z)$  و  $v(x, y)$  قسمت موهومی آن باشد، آن‌گاه  $f'(z)$  را بیابید.
۲. فرض کنید  $f(0) = 0$  و اگر  $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$ ،  $z \neq 0$  نشان دهید تابع  $f$  در مبدا مختصات مشتق‌پذیر نیست، اما رابطه‌های کشی-ریمان در مبدا مختصات برای تابع  $f$  برقرارند.
۳. نشان دهید تابع‌های  $f(z) = \sin \bar{z}$  و  $g(z) = \cos \bar{z}$  تحلیلی نیستند.
۴. الف) فرض کنید تابع مختلط  $f$  در  $\mathbb{C}$  تابعی تحلیلی و حقیقی مقدار است. نشان دهید  $f$  تابعی ثابت است.  
ب) فرض کنید تابع  $f$  تحلیلی است. نشان دهید تابع  $g$  با ضابطه‌ی  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  نیز تحلیلی است.
- پ) فرض کنید هم تابع  $f$  و هم تابع  $\bar{f}$  روی صفحه‌ی مختلط تحلیلی باشند. نشان دهید  $f$  تابعی ثابت است. ( $\bar{f}$  با ضابطه‌ی  $\bar{f} = \overline{f(z)}$  تعریف می‌شود).
۵. فرض کنید تابع  $f$  تحلیلی است و به‌ازای هر  $z$ ،  $|f(z)^2 - 1| < 1$ . نشان دهید به‌ازای هر  $z$  یا  $\operatorname{Re} f(z) < 0$  یا  $\operatorname{Re} f(z) > 0$ .
۶. فرض کنید  $f$  تابعی تحلیلی است. اگر هر یک از تابع‌های  $\operatorname{Re} f$ ،  $\operatorname{Im} f$  یا  $\operatorname{Arg} f$  تابعی ثابت باشد، نشان دهید  $f$  هم تابعی ثابت است.
۷. اگر  $v$  مزدوج همساز تابع  $v(x, y) = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$  باشد و  $v(0, 0) = 0$  آن‌گاه مقدار  $v(1, 1)$  را بیابید.
۸. برای تابع  $u(x, y) = \cos ax \cosh by$ ،  $a$  و  $b$  را به‌گونه‌ای بیابید که  $u$  همساز باشد. مزدوج همساز  $u$  را بیابید.