

ریاضی مهندسی

مسائل کلاس تمرین (هفته‌ی اول)

نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۴

۱. فرض کنید $n \geq 2$. ریشه‌های ناصفر معادله‌ی $(1-z)^n - 1 = 0$ را بیابید و سپس با استفاده از آن نشان دهید

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

۲. الف) نشان دهید معادله‌ی $z^3 + 2z + 4 = 0$ ، درون دایره‌ی واحد ریشه ندارد.
ب) نشان دهید همه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $z^5 + (z+1)^5 = 0$ روی خط $x = -\frac{1}{2}$ قرار دارند.

پ) همه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $|z|^2 z^3 - \bar{z} = 0$ را بیابید.

۳. الف) مکان هندسی نقاطی که در رابطه‌ی $|z+4i| + |z-4i| = 10$ را بیابید.

ب) مکان هندسی نقاطی که در رابطه‌ی $\frac{|z-2i|}{|z-4|} = 5$ صدق می‌کنند را بیابید.

۴. فرض کنید z و w دو عدد مختلط هستند که یا $|z| = 1$ و یا $|w| = 1$. اگر $|zw| \neq 1$ ، نشان دهید

$$\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1$$

۵. فرض کنید z_1, z_2, \dots, z_n اعدادی مختلط هستند و $|z_j| < 1$ ، $1 \leq j \leq n$. فرض کنید $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ اعداد حقیقی نامنفی هستند که $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. نشان دهید

$$\left| \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \right| < 1$$

۶. نشان دهید در صفحه‌ی مختلط، z_1, z_2, z_3 راس‌های مثلثی متساوی‌الاضلاع هستند اگر و فقط اگر

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$