

به نام خدا



آزمون پایان ترم درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال دوم ۰۳-۰۴
مدت زمان آزمون: ۳ ساعت

دانشکده علوم ریاضی

- این آزمون شامل ۶ سوال است. پاسخ سوالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط به یک سوال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی‌الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان مجاز نیست.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

۱. جواب عمومی معادله زیر را با استفاده از روش ضرایب نامعین (روش حدسی) به دست آورید: (۲۰ نمره)

$$y'' + 6y' + 9y = e^{-3t}[(1 \times 2) + (2 \times 3)t + \dots + (16 \times 17)t^{15}] + 2 \cos^2 t.$$

۲. با استفاده از روش سری‌ها دو جواب مستقل خطی از معادله دیفرانسیل زیر را به صورت سری‌های توانی حول نقطه صفر با ضرایبی که به ساده‌ترین شکل ممکن تبدیل شده‌اند، به دست آورید و سپس جواب عمومی معادله را بنویسید: (۱۰ نمره)

$$(1 + t^2)y'' - 8ty' + 20y = 0.$$

۳. الف) ابتدا تابع زیر را با استفاده از توابع پله‌ای مناسب بازنویسی کنید. سپس تبدیل لاپلاس آن را بیابید: (۵ نمره)

$$f(t) = \begin{cases} h, & 0 < t < c, \\ -h & c < t < 2c, \\ 0 & t > 2c. \end{cases}$$

ب) ابتدا تبدیل لاپلاس وارون $F(s) = \arctan \frac{a}{s}$ را برای عدد ثابت $a \in \mathbb{R}$ ، به دست آورید. سپس مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید: (۱۰ نمره)

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{3}t} \frac{\sin t}{t} dt.$$

۴. مسائل مقدار اولیه زیر را با استفاده از روش تبدیلات لاپلاس حل کنید:

الف) (۱۰ نمره)

$$y''' + y' = \delta(t - 2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0.$$

ب) (۵ نمره)

$$y'(t) + 2y = e^{-t} - \int_0^t y(u) du, \quad y(0) = 0.$$

۵. دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_2 \\ y_2' = by_1 + ay_2 \end{cases}, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1$$

بطوریکه $a, b \in \mathbb{R}$ و $b \neq 0$ اعداد ثابتی هستند.

الف) جواب مسئله مقدار اولیه فوق را به دست آورید. (۱۰ نمره)

ب) با ذکر دلیل تعیین کنید به ازای چه مقادیری از a و b جواب مسئله مقدار اولیه فوق وقتی $t \rightarrow \infty$ به سمت بردار صفر میل می‌کند. (۵ نمره)

ج) با ذکر دلیل تعیین کنید به ازای چه مقادیری از a و b جواب مسئله مقدار اولیه فوق تناوبی است. (۵ نمره)

۶. الف) همه بردارهای x^0 را طوری بیابید که جواب مسئله مقدار اولیه زیر کراندار باشد: (۱۵ نمره)

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x^0, \quad t \geq 0$$

بطوریکه

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ب) با استفاده از ماتریس اساسی جواب مسئله مقدار اولیه قسمت الف، ماتریس e^{At} را محاسبه کنید. (۵ نمره)

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(f(s))$
۱. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
۲. $t^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
۳. $t^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
۴. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
۵. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
۶. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
۷. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
۸. $H_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
۹. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
۱۰. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$