دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences

شماره:
تاریخ:
پیوست:

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۲ (گروه‌های ۱—۴)

۲۱ فروردین ۱۴۰۴   مدّت امتحان: ۳ ساعت

سؤال ۱. فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. درستی هر یک از احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) تمام مقادیر ویژهٔ ماتریس A^tA نامنفی هستند. (راهنمایی: توجه کنید که برای هر بردار ستونی x در $\mathbb{R}^n$، $x^tx = x \cdot x \geq 0$.)

(ب) نشان دهید اگر u و v دو بردار ویژهٔ ماتریس A^tA متناظر با دو مقدار ویژهٔ متمایز باشند، آنگاه u بر v عمود است.

(توجه: A^t یعنی ترانهادهٔ A و $x \cdot x$ یعنی ضرب داخلی x در x.)

($۵ + ۵ = ۱۰$ نمره)

سؤال ۲. فرض کنید $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک خم سه بار مشتقپذیر باشد طوری که به ازای هر $t \in \mathbb{R}$، $|\gamma'(t)|^2 = 1$ و $\gamma'(t) \times \gamma''(t)$ با $\gamma'''(t)$ موازی است. نشان دهید تصویر γ قسمتی از یک خط راست است.

(۱۰ نمره)

سؤال ۳. تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & : (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است.

(ب) نشان دهید مشتقات جهتدار f در $(0,0)$ در هر جهتی موجودند و مقدار آنها را محاسبه کنید.

(ج) نشان دهید f در $(0,0)$ مشتقپذیر نیست.

($۵ + ۱۰ + ۵ = ۲۰$ نمره)

سؤال ۴. درستی هر یک از احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) اگر $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ خم مشتقپذیری باشد که تصویر آن روی کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات قرار داشته باشد، آنگاه به ازای هر $0 \leq t \leq 1$، $\gamma(t)$ بر $\gamma'(t)$ عمود است.

(ب) اگر $f : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتقپذیر باشد و در هر نقطهٔ $x \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$، $\nabla f(x)$ با x موازی باشد، آنگاه f روی هر کره به مرکز مبدأ مختصات مقداری ثابت دارد.

(توجه: چنین توابعی، توابع شعاعی نامیده می‌شوند.)

($۱۰ + ۱۰ = ۲۰$ نمره)

---

tel: (+9821) 66005217
fax: (+9821) 66005117
P.O.Box: 11155-9415 Iran

http://math.sharif.ir
mathinfo@sharif.ir

تلفن: (۰۲۱)۶۶۰۰۵۲۱۷
فکس: (۰۲۱)۶۶۰۰۵۱۱۷
صندوق پستی: ۱۱۱۵۵-۹۴۱۵

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences

سؤال ۵. فرض کنید $f:\mathbb{R}^{۲} \longrightarrow \mathbb{R}$، $z=f(x,y)$، تابعی باشد که دارای مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته روی $\mathbb{R}^{۲}$ است. قرار می‌دهیم $x=t\sin s$ و $y=t\cos s$. عبارت $\dfrac{\partial^{۲} z}{\partial s\,\partial t}$ را بر حسب مشتقات پاره‌ای f نسبت به x و y بازنویسی کنید.

(۱۵ نمره)

سؤال ۶. تابع $f:\mathbb{R}^{۲} \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(x,y)=x^{۲}y\, e^{-(x^{۲}+y^{۲})}$$

(الف) تمام نقاط بحرانی f را مشخص کنید.

(ب) با ارائهٔ استدلال، از بین نقاط بحرانی به دست آمده، نقاط ماکزیمم و مینیمم موضعی f را مشخص کنید.

(ج) با ارائهٔ استدلال، ماکزیمم و مینیمم مطلق f را (در صورت وجود) محاسبه کنید.

(۱۰ + ۱۰ + ۵ = ۲۵ نمره)

مجموع: ۱۰۰ نمره

tel: (+9821) 66005217
fax: (+9821) 66005117
P.O.Box: 11155-9415 Iran

http://math.sharif.ir
mathinfo@sharif.ir

تلفن: (۰۲۱)۶۶۰۰۵۲۱۷
فکس: (۰۲۱)۶۶۰۰۵۱۱۷
صندوق پستی: ۱۱۱۵۵-۹۴۱۵