ریاضی عمومی ۲ **(بهار ۱۴۰۳)**

تمرین سری چهاردهم

سوال ۱

برای میدان برداری $\mathbf{F}$ داده شده، $\mathbf{div}\,\mathbf{F}$ و $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ را محاسبه کنید.

آ) $\mathbf{F} = xy^2\,\mathbf{i} - yz^2\,\mathbf{j} + zx^2\,\mathbf{k}$.

ب) $\mathbf{F}(r,\theta) = r\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$.

سوال ۲

برای میدان‌های اسکالر ϕ، ψ، f، g و h موارد زیر را اثبات کنید.

آ) $\nabla \times (\phi\nabla\psi) = -\nabla \times (\psi\nabla\phi) = \nabla\phi \times \nabla\psi.$

ب) $\nabla \bullet (f(\nabla g \times \nabla h)) = \nabla f \bullet (\nabla g \times \nabla h)$.

سوال ۳

انتگرال $\oint_C (x^2 - xy)\mathrm{d}x + (xy - y^2)\mathrm{d}y$ را محاسبه کنید، که در آن C محیط مثلث با رئوس $(0,0)$، $(1,1)$ و $(2,0)$ و در جهت چرخش عقربه‌های ساعت است.

سوال ۴

انتگرال $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r}$ را محاسبه کنید که در آن $\mathcal{C} : \mathbf{r} = \sin t\,\mathbf{i} + \sin ۲t\,\mathbf{j}$، $(۰ \leq t \leq ۲\pi)$ و $\mathbf{F} = ye^{x^۲}\mathbf{i} + x^۳e^{y}\mathbf{j}$.

سوال ۵

با استفاده از قضیه دیورژانس، شار میدان $\mathbf{F} = x^۳\,\mathbf{i} + ۳yz^۲\,\mathbf{j} + (۳y^۲z + x^۲)\,\mathbf{k}$ را خارج کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ محاسبه کنید $(a > ۰)$.

سوال ۶

شار میدان $\mathbf{F} = x^۲\,\mathbf{i} + y^۲\,\mathbf{j} + z^۲\mathbf{k}$ بیرونی مار بر سطح $x + y + z \leq ۳$، $x \geq ۰$، $y \geq ۰$ و $z \geq ۰$ را محاسبه کنید.

سوال ۷

اگر $\mathbf{F}$ یک میدان برداری هموار بر روی D باشد، نشان دهید

$$\iiint_D \phi\,\mathbf{div}\,\mathbf{F}\mathrm{d}V + \iiint_D \nabla\phi \bullet \mathbf{F}\mathrm{d}V = \oiint_{\mathcal{S}} \phi\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\mathrm{d}S$$

سوال ۸

$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}\,\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\mathrm{d}S$ را محاسبه کنید که در آن $\mathcal{S}$ نیم‌کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$، $z \geq ۰$ با نرمال رو به بیرون و $\mathbf{F} = ۳y\,\mathbf{i} - ۲xz\,\mathbf{j} + (x^۲ - y^۲)\,\mathbf{k}$ است.

سوال ۹

$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r}$ را حول خم

$$\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \sin ۲t\,\mathbf{k}, \quad (۰ \leq t \leq ۲\pi),$$

محاسبه کنید که در آن $\mathbf{F} = (e^x - y^۳)\,\mathbf{i} + (e^y + x^۳)\,\mathbf{j} + e^z\,\mathbf{k}$.