

## تمرین سری سیزدهم

## سوال ۱

خطوط جریان میدان‌های سرعت داده شده را توصیف کنید.

$$\mathbf{v}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - x\mathbf{k} \quad (\text{آ})$$

$$\mathbf{v}(x, y) = x\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} \quad (\text{ب})$$

## سوال ۲

خطوط میدان میدان‌های برداری قطبی داده شده را معین کنید.

$$\mathbf{F} = 2\hat{r} + \theta\hat{\theta} \quad (\text{آ})$$

$$\mathbf{F} = r\hat{r} - \hat{\theta} \quad (\text{ب})$$

## سوال ۳

نشان دهید که میدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} + \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)\mathbf{k}$$

بقاست و پتانسیل آن را بیابید. سطوح هم‌پتانسیل را توصیف کنید و خطوط میدان  $\mathbf{F}$  را بیابید.

سوال ۴

(آ) نشان دهید که گرادیان یک تابع بیان شده بر حسب مختصات قطبی در صفحه مساوی است با

$$\nabla\phi(r, \theta) = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta}.$$

(ب) با استفاده از قسمت (آ) نشان دهید که شرط لازم برای بقا بودن میدان برداری

$$\mathbf{F}(r, \theta) = F_r(r, \theta)\hat{r} + F_\theta(r, \theta)\hat{\theta}$$

(بیان شده بر حسب مختصات قطبی) آن است که

$$\frac{\partial F_r}{\partial\theta} - r\frac{\partial F_\theta}{\partial r} = F_\theta.$$

(ج) میدان برداری

$$\mathbf{F} = r^\alpha \cos\theta\hat{r} + \alpha r^\beta \sin\theta\hat{\theta}$$

به ازای چه مقادیری از ثابت‌های  $\alpha$  و  $\beta$  بقاست؟ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  این مقادیر را داشته باشند، برای  $\mathbf{F}$  یک پتانسیل پیدا کنید.

سوال ۵

انتگرال  $\int_C \frac{ds}{(2y^2+1)^{3/2}}$  را که در آن  $C$  سهمی

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad x + z = 1$$

است، پیدا کنید. راهنمایی:  $y = t$  را پارامتر بگیرید.

سوال ۶

کار میدان نیروی

$$\mathbf{F} = (y^2 \cos x + z^3)\mathbf{i} + (2y \sin x - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$$

را در حرکت یک ذره در امتداد منحنی

$$x = \sin^{-1} t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 3t - 1, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

بیابید.

سوال ۷

برای منحنی  $C$  داده شده در قسمت‌های زیر، انتگرال‌های خط بسته‌ی

$$\oint_C y dx, \quad \oint_C x dy$$

را حول منحنی‌های داده شده و خلاف جهت عقربه‌های ساعت حساب کنید.

(آ) مرز نیم‌قرص  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ،  $y \geq 0$ .

(ب) مثلث به رئوس  $(0, 0)$ ،  $(a, 0)$  و  $(0, b)$ .

سوال ۸

انتگرال  $\iint_P \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$  را که در آن  $P$  صفحه به معادله  $Ax + By + Cz = D$  ( $D \neq 0$ ) است، حساب کنید.

سوال ۹

شار  $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$  رو به بالای مار بر سطح

$$\mathbf{r} = e^u \cos v \mathbf{i} + e^u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k},$$

را که  $0 \leq u \leq 1$  و  $0 \leq v \leq \pi$ ، بیابید.