

تمرین سری دهم

سوال ۱

خم $\mathbb{R}^3 \rightarrow [0, 2\pi] : \gamma$ با ضابطه‌ی $\gamma(t) = (\sqrt{2}t, \cos t + \sin t, -\cos t + \sin t)$ را در نظر بگیرید.

(آ) برای هر $0 \leq t \leq 2\pi$ ، طول خم در بازه‌ی $[0, t]$ ، یعنی $s(t)$ ، را به دست آورید.

(ب) خم را بر حسب طول پرمایش کنید.

(ج) تعریف کنید $\hat{T}(s) := \frac{d\gamma(s)}{ds}$ ، که در آن s پارامتر طول است. ثابت کنید که $|\hat{T}(s)| = 1$.

(د) طول خم در $t = \frac{\pi}{4}$ را محاسبه کنید. سپس، معادله خط مماس بر خم در نقطه‌ی $t = \frac{\pi}{4}$ را به دست آورید.

(ه) تعریف کنید $\hat{N}(s) = \frac{\frac{d\hat{T}(s)}{ds}}{\left| \frac{d\hat{T}(s)}{ds} \right|}$. نشان دهید که بردارهای $\hat{T}(s)$ و $\hat{N}(s)$ بر هم عمودند.

(و) معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از خم در $t = \frac{\pi}{4}$ و شامل بردارهای $\hat{T}(s(\frac{\pi}{4}))$ و $\hat{N}(s(\frac{\pi}{4}))$ را تشکیل دهید.

سوال ۲

تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با رابطه‌ی $f(x, y) = y(x^2 - 1)$ داده شده است.

(آ) سطوح تراز این تابع را به صورت تقریبی رسم کرده و جهت بردار گرادیان را در نقاط مختلف شکل مشخص کنید.

(ب) مقدار بیشترین تغییرات جهتی تابع را در نقطه $(2, 1)$ پیدا کنید.

(ج) نقاط بحرانی این تابع را پیدا کرده و نوع آن‌ها را از لحاظ بیشینه موضعی، کمینه موضعی و زینی مشخص کنید.

سوال ۳

فرض کنید z تابعی از u و v با مشتقات پاره‌ای مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد و در نقطه‌ی $a = (1, \frac{\pi}{4})$ داشته باشیم:

$$\frac{\partial z}{\partial u}(a) = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial v}(a) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(a) = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}(a) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(a) = -1.$$

اگر $u = x + \sin y$, $v = y + \sin x$ و $b = (0, \frac{\pi}{4})$ ، مقادیر $\frac{\partial z}{\partial x}(b)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(b)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(b)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(b)$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(b)$ را محاسبه کنید.

سوال ۴

فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد با این ویژگی که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، $\nabla f(x) \bullet x = f(x)$. نشان دهید برای هر $t \in \mathbb{R}$ و هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، $f(tx) = tf(x)$.
(راهنمایی: برای $x \in \mathbb{R}^n$ داده شده، به تابع $\phi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $\phi(t) = f(tx)/t$ توجه کنید.)

سوال ۵

فاصله کمینه میان منحنی‌های $y = x^2$ و $y = 2x^2 + 1$ را محاسبه کنید.

سوال ۶

رویه‌ی $1 = x^2 + y^2 - 2z^2$ و نقطه‌ی $P = (1, 1, 1)$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی تمام نقاط Q از این رویه را بیابید طوری که پاره‌خط PQ در نقطه‌ی Q بر رویه مماس باشد. کوتاه‌ترین طول، در بین چنین پاره‌خط‌های مماس PQ چقدر است؟ چرا؟

سوال ۷

تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

(آ) آیا تابع f در نقطه‌ی $(0, 0)$ پیوسته است؟ چرا؟

(ب) آیا تابع f در نقطه‌ی $(0, 0)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟