

تمرین سری نهم

سوال ۱

نقاط بحرانی توابع زیر را محاسبه و نوع آنها را مشخص کنید.

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y) = \cos x + \cos y \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-x+y+x^2+y^2}} \quad (\text{ج})$$

$$f(x, y, z) = xy + x^2z - x^2 - y - z^2 \quad (\text{د})$$

$$f(x, y) = x^2ye^{-(x^2+y^2)} \quad (\text{ه})$$

سوال ۲

نقاط بحرانی تابع $z = g(x, y)$ که تساوی $2 = e^{2zx-x^2} - 3e^{2zy+y^2}$ را برآورده می‌کند، محاسبه کنید. سپس مشخص کنید که کدام یک از این نقاط بحرانی، بیشینه، کدام یک کمینه و کدام یک زینی هستند.

سوال ۳

بیشینه و کمینه مقدار تابع $f(x, y, z) = xy + z^2$ را بر روی ناحیه $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ به دست آورید. از قضیه ضرایب لاگرانژ استفاده کنید.

سوال ۴

فرض کنید α ، β و γ زوایای یک مثلث هستند. نشان دهید که

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

برای چه نوع مثلثی تساوی رخ می‌دهد.

تمرین سری نهم

سوال ۵

فاصله کمینه میان منحنی‌های $y = x^2$ و $y = 2x^2 + 1$ را با حل مساله‌ی

$$\begin{aligned} \min \quad & S = (x - u)^2 + (y - v)^2 \\ \text{s.t.} \quad & y = x^2, \\ & v = 2u^2 + 1. \end{aligned}$$

محاسبه کنید.

سوال ۶

برای تابع مشتق‌پذیر $f(x, y)$ ، که

$$D_{(i+j)/\sqrt{2}}f(a, b) = 3\sqrt{2}, \quad D_{(3i-4j)/5}f(a, b) = 5,$$

بردار $\nabla f(a, b)$ را به دست آورید.

سوال ۷

تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

(آ) $\nabla f(0, 0)$ را محاسبه کنید.

(ب) با استفاده از تعریف مشتق جهت‌ی، $D_{\mathbf{u}}f(0, 0)$ را محاسبه کنید، که در آن $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

(ج) آیا تابع $f(x, y)$ در $(0, 0)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟