



تاریخ: ۰۳/۳/۲۴
شماره:
پوست:

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: $\frac{1}{3}$ ساعت

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۲ (گروه‌های ۱، ۲، ۳، ۵)

۲۲-۰۱۶

نیمسال دوم ۰۳-۰۲

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سوالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید. استفاده از ماشین حساب و نیز هرگونه پرسش و پاسخ در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.

سؤال ۱. حاصل انتگرال مکرر زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} \cos(x^2 + 2xy + y^2) dx \right) dy$$

سؤال ۲. فرض کنید W ناحیه‌ای در فضا باشد که با نامعادله $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ داده شده است. حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \iiint_W (y^2 + (z-1)^2) dx dy dz$$

سؤال ۳. فرض کنید P صفحه به معادله $ax + by + cz = d$ باشد ($d \neq 0$). حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \iint_P \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dS$$

(راهنمایی: توجه کنید که تابع زیر انتگرال فقط به فاصله از مبدأ مختصات بستگی دارد.)

سؤال ۴. میدان برداری $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ را با ضابطه

$$F(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} \mathbf{i} + \frac{x+y}{x^2+y^2} \mathbf{j}$$

در نظر بگیرید. هم‌چنین، خم C را قسمتی از سهمی $y = 2x^2 - 1$ در نظر بگیرید که نقطه $(-1, 1)$ را به نقطه $(1, 1)$ وصل می‌کند. حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_C F \cdot dr$$

سؤال ۵. میدان برداری $F: \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ را با ضابطه

$$F(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

در نظر بگیرید. همچنین، رویه S را قسمتی از کره $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ در نظر بگیرید که بالای صفحه $z = 1$ قرار دارد. اگر n بردار نرمال یکه S با جهت روبه خارج کره باشد، حاصل انتگرال زیر را یک بار با استفاده از تعریف و بار دیگر به کمک قضیه دیورژانس محاسبه کنید:

$$I = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

سؤال ۶. میدان برداری $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را با ضابطه

$$F(x, y, z) = -y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$$

در نظر بگیرید. همچنین، C را خمی در نظر بگیرید که از تقاطع دو رویه $x^2 + y^2 = 1$ و $z = x^2 - y^2$ حاصل می‌شود. اگر جهت C طوری باشد که تصویر آن در صفحه xy در جهت مثلثاتی باشد، حاصل انتگرال زیر را یک بار با استفاده از تعریف و بار دیگر به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید:

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

توزیع نمره. سؤال ۱: ۲۰ نمره، سؤال ۲: ۲۰ نمره، سؤال ۳: ۲۰ نمره، سؤال ۴: ۳۰ نمره، سؤال ۵: ۱۵+۱۵ نمره، سؤال ۶: ۱۰+۲۰ نمره.

مجموع: ۱۵۰ نمره