

به نام خدا



آزمون میان‌ترم درس ریاضی مهندسی
نیم‌سال دوم ۰۲-۰۳
مدت زمان آزمون: ۳ ساعت

ارزش همه سوالات با هم برابر است.

دانشکده علوم ریاضی

۱. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = x - x^2$, $-\pi < x < \pi$ و $f(x + 2\pi) = f(x)$ نشان دهید:

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}.$$

۲. جواب مسئله با شرایط اولیه-مرزی زیر را بیابید.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_x - u, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-\frac{x}{\pi}}, & u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, & u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

۳. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - u_{xxyy} + u_{ttyy} - u + xyt, & 0 \leq x, y \leq \pi, t \geq 0 \\ u(x, y, 0) = xy, & u_t(x, y, 0) = 0, \\ u(0, y, t) = u(x, 0, t) = 0, & u(\pi, y, t) = \pi yt, \quad u(x, \pi, t) = \pi xt. \end{cases}$$

۴. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < 2, \quad -\pi < \theta < \pi \\ u_r(2, \theta) = \sin \theta, & |u| < \infty, \\ u(r, -\pi) = u(r, \pi), & u_\theta(r, -\pi) = u_\theta(r, \pi). \end{cases}$$

۵. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u_{txx} - u + e^{-xt}, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = H_1(x) - H_2(x), & u_t(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = t, & u(\infty, t) = u_x(\infty, t) = 0. \end{cases}$$

در اینجا $H_a(x)$ تابع پله‌ای واحد با نقطه شروع a است.

۶. مطلوبست حل مسئله کشی زیر

$$\begin{cases} u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} = x - y, & -\infty < x < \infty, y > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & u_y(x, 0) = x. \end{cases}$$

پیوست

در صورت نیاز از مطالب زیر استفاده کنید.

فرمول‌های اولر-فوریه:

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx$$

و

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx.$$

ضرایب فوریه مختلط:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{-p}^p f(x) e^{-\frac{in\pi x}{p}} dx.$$

تبدیل فوریه سینوسی:

$$F_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin wx dx.$$

تبدیل فوریه کسینوسی:

$$F_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos wx dx.$$

تبدیل فوریه نامتناهی:

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{iwx} dx.$$

تعریف:

به ازای هر عدد حقیقی ثابت $a \geq 0$ ، به تابع

$$H_a(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$$

تابع پله‌ای می‌گوییم.