



آزمون پایان ترم درس ریاضی مهندسی
نیم سال دوم ۰۳-۰۲
مدت زمان آزمون: ۳ ساعت

ارزش همه سوالات با هم برابر است.

دانشکده علوم ریاضی

۱. الف) می دانیم تابع $u(x, \theta) = r^3 \cos 3\theta + \ln r$ در نیم صفحه بالایی همساز است. مزدوج همساز آن را به دست آورید.

ب) تابع $v(x, y)$ را طوری به دست آورید تا تابع $f(z) = xy + \sin x \sinh y + iv(x, y)$ یک تابع تحلیلی شود. مشتق این تابع را نیز به دست آورید.

۲. الف) معادله $\sin(z^2 + i) = 1$ را حل کنید.

ب) کلیه مقادیر و مقدار اصلی $(\sqrt{3} + i)^{3+2i}$ را بیابید.

۳. بزرگترین میدان‌هایی را که توابع $f(z) = \text{Log}(z - i)$ و $g(z) = \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+i}$ در آن‌ها تحلیلی هستند، پیدا کنید. توجه کنید که در این توابع Log شاخه اصلی لگاریتم است.

۴. انتگرال‌های مختلط زیر را حساب کنید.

ب) $\oint_{|z|=1} e^{2x} dz$

الف) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$

۵. انتگرال‌های حقیقی زیر را محاسبه کنید.

ب) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta$

الف) $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{(4+x^2)(9+x^2)} dx$

۶. الف) تصویر میدان $1 < y < 2$ را تحت نگاشت $\omega = z^2$ به دست آورید.

ب) تصویر ناحیه $\{0 < y < \frac{\pi}{4}, x > 0\}$ را تحت نگاشت $\omega = e^z$ به دست آورید.

ج) تبدیل مبیوسی را بیابید که سه نقطه ۲، ∞ و $4i$ را به ترتیب بر سه نقطه i ، ۱ و ∞ بنگارد.

پیوست: در صورت نیاز از بسط‌های مک‌لورن زیر استفاده کنید:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$