

(1) در هر یک از مسائل زیر شعاع همگرایی سری توانی داده شده را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n}$

د) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

ه) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$

و) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 (x+2)^n}{3^n}$

(2) در هر مورد سری تیلور را برای تابع داده شده حول نقطه x_0 بیابید. شعاع همگرایی آنها را نیز تعیین کنید.

الف) $\sin x$, $x_0 = 0$

ب) $\frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$

ج) $\frac{1}{1-x}$, $x_0 = 2$

(3) با فرض $y = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ ، y' و y'' را محاسبه کنید و چهار جمله ی اول هر یک از این سری ها و ضریب x^n در جمله عمومی را بنویسید.

(4) در هر مورد، عبارت داده شده را به صورت مجموعی بنویسید که جمله مولد آن شامل x^n باشد.

الف) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

ب) $(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

5) در هر کدام از مسائل زیر، معادله دیفرانسیل داده شده را به وسیله ی یک سری توانی حول نقطه مفروض x_0 حل کنید. رابطه بازگشتی را بیابید. همچنین در هر یک از دو جواب مستقل خطی نخستین چهارجمله را به دست آورید و در صورت امکان در هر یک از جوابها جمله عمومی را بیابید.

الف) $y'' - y = 0, \quad x_0 = 0$

ب) $y'' + k^2 x^2 y = 0, \quad x_0 = 0,$

ج) $(2 + x^2) y'' - xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 0$

6) در هر یک از مسائل زیر یک کران پایین برای شعاع همگرایی جوابهای سری معادله دیفرانسیل داده شده حول نقطه مفروض x_0 تعیین کنید.

الف) $y'' + 4y' + 6xy = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4$

ب) $xy'' + y = 0; \quad x_0 = 1$

7) (معادلات مرتبه اول) در هر کدام از مسائل زیر، معادلات دیفرانسیل داده شده را با روش سری بر حسب توانهای x حل کنید.

الف) $y' - y = 0$

ب) $(1 - x) y' = y$

ج) $y' + xy = 1 + x$

8) در هر یک از مسائل زیر همه نقاط تکین معادله دیفرانسیل داده شده را بیابید و تعیین کنید کدام یک از این نقاط منتظم یا نا منتظم اند.

الف) $xy'' + (1 - x) y' + xy = 0$

ب) $x^2 (1 - x)^2 y'' + 2xy' + 4y = 0$

ج) $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ (Bessel function)

د) $y'' + (\ln |x|) y' + 3xy = 0$

9) در هر یک از موارد زیر، نشان دهید که معادله دیفرانسیل داده شده در $x = 0$ دارای یک نقطه تکین منتظم است. معادله مبین رابطه بازگشتی و ریشه های معادله مبین را تعیین کنید. جواب سری ($x > 0$) متناظر با ریشه بزرگتر را بیابید، جواب سری متناظر با ریشه کوچکتر را نیز بیابید.

الف) $2xy'' + y' + xy = 0$

ب) $xy'' + y = 0$

ج) $xy'' + y' - y = 0$

10) معادله چیشف به صورت زیر است

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

که در آن α مقداری ثابت است.

الف) نشان دهید که $x = 1$ و $x = -1$ نقاط تکین منتظم اند، و توانها (exponent) را در هر یک از این نقاط تکین بیابید.

ب) دو جواب مستقل خطی حول $x = 1$ بیابید.

11) در هر مورد همه نقاط تکین منتظم معادله دیفرانسیل داده شده را بیابید. معادله مبین و توان ها را در هر یک از نقاط تکین منتظم تعیین کنید.

الف) $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$

ب) $y'' + 4xy' + 6y = 0$

ج) $2x(x+2)y'' + y' - xy = 0$

د) $x^2(1-x)y'' - (1+x)y' + 2xy = 0$

12) در هر یک از معادلات زیر،

الف) نشان دهید که $x = 0$ یک نقطه تکین منتظم معادله دیفرانسیل داده شده است.

ب) توانها را در نقطه تکین $x=0$ بیابید.

ج) نخستین سه جمله ناصفر را در هر یک از دو جواب مستقل خطی حول $x = 0$ بیابید.

A) $xy'' + y' - y = 0$

B) $xy'' + y = 0$

13) نشان دهید که معادله مرتبه نیم ($v = 0.5$) بسل

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0 \quad , x > 0$$

را با تعویض متغیر وابسته $y = x^{1/2} v(x)$ می توان به معادله $v'' + v = 0$ تبدیل کرد. از اینجا نتیجه بگیرید که جوابهای معادله مرتبه نیم بسل عبارتند از

$$y_2(x) = x^{-1/2} \sin x \quad , \quad y_1(x) = x^{-1/2} \cos x$$