

سری هفتم تمرینات

تمرین ۱

در هر قسمت مشتق، نسبت به متغیر خواسته شده را از معادلات به دست آورید. آنگاه تعیین کنید چه شرطی باید برقرار باشد تا معادله نسبت به متغیر مشخص شده دارای جواب باشد؟

آ) محاسبه $\frac{\partial y}{\partial z}$ در معادله $e^{yz} - x^y z \ln y = \pi$

ب) محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}$ اگر داشته باشیم $F(x^y - z^y, y^y + xz) = 0$ که در آن F دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته می‌باشد.

ج) محاسبه $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ اگر معادلات به شکل زیر باشند:

$$x^y + y^y + z^y + w^y = 1,$$

$$x + 2y + 3z + 4w = 2.$$

تمرین ۲

نشان دهید می‌توانیم دستگاه معادلات داده شده را حول نقطه $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$ برای x, y, z به عنوان توابعی از u, v حل کنیم. سپس مقدار $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v$ را در نقطه $(u, v) = (1, 1)$ به دست آورید.

$$xy^y + zu + v^y = 3,$$

$$x^y z + 2y - uv = 2,$$

$$xu + yv - xyz = 1.$$

تمرین ۳

اگر $F(x, y, z) = 0$ آنگاه درستی رابطه زیر را نشان دهید.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

سری هفتم تمرینات

تمرین ۴

نشان دهید اگر معادلات $F(x, y, u, v) = 0$ و $G(x, y, u, v) = 0$ برای x و y به عنوان توابعی از u, v حل شوند. آنگاه داریم:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} / \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$$

تمرین ۵

نشان دهید اگر معادلات $x = f(u, v)$ و $y = g(u, v)$ را برای u و v بر حسب توابعی از x و y حل کنیم آنگاه رابطه زیر برقرار است.

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 / \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

تمرین ۶

نقاط بحرانی توابع زیر را مشخص کنید و نوع هر نقطه را مشخص کنید.

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y) = \cos x + \cos y \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y) = xe^{-x^2+y^2} \quad (\text{ج})$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-x+xy+x^2+y^2}} \quad (\text{د})$$