

سری ششم تمرینات

تمرین ۱

ماتریس ژاکوبین تبدیل $f(\rho, \phi, \theta) = (x, y, z)$ را به دست آورید که در آن

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

در اینجا (ρ, ϕ, θ) مختصات کروی در دستگاه xyz می باشد.

تمرین ۲

صفحه مماس بر سطح تراز تابع $f(x, y, z) = ye^{-x} \sin z$ گذرا از نقطه $(0, 1, \frac{\pi}{4})$ را به دست آورید.

تمرین ۳

اگر داشته باشیم $f(x, y, z) = |r|^{-n}$ که در آن $r = xi + yj + zk$ نشان دهید $\nabla f = \frac{-nr}{|r|^{n+2}}$.

تمرین ۴

نشان دهید در مختصات قطبی (r, θ) گرادیان تابع $f(r, \theta)$ برابر

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

می باشد که در آن \hat{r} بردار یکه در جهت بردار مکان $r = xi + yj$ است و بردار $\hat{\theta}$ یکه در سمت راست بردار \hat{r} در جهت افزایش θ می باشد.

تمرین ۵

در کدام جهت در نقطه (a, b, c) تابع $f(x, y, z)$ نصف حداکثر مقدار افزایش خود را در آن نقطه خواهد داشت؟

تمرین ۶

ثابت کنید اگر $\nabla f(x, y)$ بر روی دیسک $x^2 + y^2 < r$ برابر صفر باشد. آنگاه درون این دیسک تابع ثابت خواهد بود.

تمرین ۷

به فرض تابع $f(x, y)$ در نقطه (a, b) پیوسته باشد. زاویه بین دو بردار v_1 و v_2 در چه شرطی صدق کند تا بتوانیم از مشتق‌های جهتی $D_{v_1} f(x, y)$ و $D_{v_2} f(x, y)$ بردار گرادیان در آن نقطه را مشخص کنیم؟

تمرین ۸

به فرض $T(x, y)$ نمایانگر دمای حرارت در هر نقطه از صفحه باشد و فرمول آن برابر $T(x, y) = x^2 - 2y^2$ باشد. (آ) نمودار خم‌های نقاط هم دما را برای T رسم کنید.

(ب) مورچه‌ای که در نقطه $(-1, 2)$ قرار دارد در کدام جهت باید حرکت کند تا در سریعترین حالت خنک شود؟

(ج) اگر مورچه در جهت قسمت قبل با سرعت k (واحد مسافت بر واحد زمان) حرکت کند. با چه نرخ این کاهش دما را احساس می‌کند؟

(د) مورچه بر روی چه خمی که از نقطه $(-1, 2)$ حرکت کند تا همیشه بیشترین کاهش دما را احساس کند؟

تمرین ۹

معادله خمی را در صفحه xy پیدا کنید که از نقطه $(1, 1)$ بگذرد و با تمام سطح ترازهای تابع $f(x, y) = x^2 + y^4$ در صورت اشتراک، زاویه قائمه داشته باشد.

تمرین ۱۰

اگر v یک بردار ناصفر باشد. عبارت $D_v(D_v f(x, y))$ را بر حسب درایه‌های v و مشتق‌های جزئی مرتبه دوم بیان کنید. تفسیر این مقدار برای یک ذره متحرک چه می‌باشد؟