ریاضی عمومی ۲ (بهار ۱۴۰۲)

سری پنجم تمرینات

تمرین ۱

با استفاده از دو روش متفاوت مقدار $\frac{\partial u}{\partial t}$ را که در آن $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = e^{st}$ و $y = 1 + s^2 \cos t$
محاسبه کنید

تمرین ۲

به فرض تابع $f(x,y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد. عبارت زیر را بر حسب مشتق‌های جزئی تابع f محاسبه کنید.

$$\frac{\partial}{\partial y} f(yf(x,t), f(y,t))$$

تمرین ۳

در هر قسمت مشتق تابع داده شده را محاسبه کنید. سپس با استفاده از نقاط نزدیکی که مقدار آن مشخص است. مقدار تابع را در نقاط خواسته شده تقریب بزنید.

آ) تابع $z = x^2 e^{3y}$ در نقطه $x = 3.05$, $y = -0.02$

ب) تابع $u = x \sin(x+y)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{20}$, $y = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{30}$

تمرین ۴

همه نقاطی را که نمودار دو تابع $z = e^x - y$ و $z = x - e^y$ در آن نقاط بر یکدیگر مماس می‌شوند را به دست آورید.

تمرین ۵

به فرض تابع $f(x,y)$ بطور مثبت همگن از مرتبه k باشد و دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد. نشان دهید برای این تابع رابطه زیر برقرار است.

$$x^۲ f_{۱۱}(x,y) + ۲xyf_{۱۲}(x,y) + y^۲ f_{۲۲}(x,y) = k(k-۱)f(x,y)$$

تمرین ۶

تابع $f(x,y)$ با ضابطه زیر تعریف شده است.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۲xy(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

آ) نشان دهید که برای همه نقاط رابطه $f(x,y) = -f(y,x)$ برقرار است.

ب) نشان دهید برای هر $(x.y) \neq (۰,۰)$ داریم $f_۱(x,y) = -f_۲(y,x)$ و در نتیجه $f_{۱۲}(x,y) = -f_{۲۱}(y,x)$

ج) نشان دهید برای تمام y ها $f_۱(۰,y) = -۲y$ و در نتیجه $f_{۱۲}(۰,۰) = -۲$

د) نشان دهید برای تمام x ها $f_۲(x,۰) = ۲x$ و در نتیجه $f_۲۱(۰,۰) = ۲$

ه) توضیح دهید که چرا نتایج قسمت‌های قبل با قضیه تعویض ترتیب مشتق گیری جزئی در تناقض نیست؟

تمرین ۷

نشان دهید مساله مقدار اولیه معادله موج یک بعدی:

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) = c^۲ u_{xx}(x,t) \\ &u(x,۰) = p(x) \\ &u_t(x,۰) = q(x) \end{aligned}$$

جواب آن به شکل زیر است.

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}[p(x-ct) + p(x+ct)] + \frac{۱}{۲c}\int_{x-ct}^{x+ct} q(s)\mathrm{d}s$$