

با اسمه تعالی

ریاضی عمومی دو (حسابان چندمتغیره)

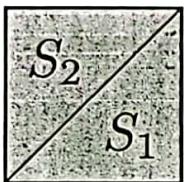
آزمون پایان ترم (۱۴۰۱ تیر)

۱) دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}x + y + u + v &= 2 \\x^2y + y^2u + u^2v + v^2x &= 1\end{aligned}$$

الف) نشان دهید در همسایگی نقطه‌ی  $(x, y, u, v) = (0, 1, -1, 2)$  می‌توان  $y, x, u, v$  را تابع مشتق‌پذیری از  $u, v$  گرفت.

ب) با در نظر گرفتن  $x$  به عنوان تابعی از  $u, v$ ، مقدار  $\frac{\partial x}{\partial u}$  را در نقطه‌ی مشخص شده در قسمت (الف) محاسبه کنید.



۲) مریب  $[1 \leq x, y \leq 0 : (x, y)]$  را با رسم قطر اصلی به دو ناحیه‌ی  $S_1, S_2$  تقسیم کرده‌ایم.

$$\int \int_{S_2} \frac{x}{y} dA \quad \int \int_{S_1} \frac{x}{y} dA$$

۳) فرض کنید  $F$  میدان برداری  $\vec{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$  در صفحه باشد.

الف) نشان دهید انتگرال  $F$  روی بیضی  $\{ \cos(t)\vec{i} + 2\sin(t)\vec{j} : 0 \leq t \leq 2\pi \}$  برابر است با

ب) مقدار انتگرال بالا را محاسبه کنید!

۴) فرض کنید  $G(x, y, z) = (0, 0, y)$  میدان برداری در فضای سه‌بعدی باشد.

الف) نشان دهید همه جا  $\text{curl } G = (1, 0, 0)$

ب) نشان دهید برای هر میدان برداری هموار دیگر مثل  $F$  که همه جا به جز در مبدا مختصات  $\text{curl } F = (1, 0, 0)$ ، و هر

خم بسته‌ی هموار  $C$  در صفحه‌ی  $xy$  که از مبدا نمی‌گذرد، داریم:  $\oint_C F \cdot dr = 0$ .

۵) فرض کنید  $M$  سطح جانبی مخروطی با قاعده‌ی دایره‌ی واحد (دایره‌ی با شعاع یک به مرکز مبدا) در صفحه‌ی  $yz$  و

راس  $(3, 0, 1)$  باشد که به سمت بیرون مخروط جهت‌دار شده است. همچنین فرض کنید  $k$  بردار استاندارد سوم در فضا

و  $\hat{N}$  بردار یکه‌ی عمود بر سطح باشد. مقدار انتگرال  $\iint_M k \cdot \hat{N} dS$  را به روش‌های زیر محاسبه کنید:

الف) با انتخاب یک پرمایش برای  $M$  و محاسبه‌ی مستقیم.

ب) به کمک قضیه‌ی دیورزانس.

(در صورت نیاز می‌توانید از حکم قسمت اول هر سوال برای حل قسمت دوم استفاده کنید هرچند آن را نشان نداده باشد)