

باسمه تعالی

ریاضی عمومی دو (حسابان چندمتغیره)

آزمون پایان ترم (۱ تیر ۱۴۰۱)

(۱) دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}x + y + u + v &= 2 \\x^2y + y^2u + u^2v + v^2x &= 1\end{aligned}$$

(الف) نشان دهید در همسایگی نقطه‌ی $(x, y, u, v) = (0, 1, -1, 2)$ می‌توان x, y را تابع مشتق‌پذیری از u, v گرفت.
(ب) با در نظر گرفتن x به عنوان تابعی از u, v ، مقدار $\frac{\partial x}{\partial u}$ را در نقطه‌ی مشخص شده در قسمت (الف) محاسبه کنید.



(۲) مربع $\{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ را با رسم قطر اصلی به دو ناحیه‌ی S_1, S_2 تقسیم کرده‌ایم.

$$\text{مقدار انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید: (الف) } \iint_{S_1} \frac{x}{y} dA \quad \text{(ب) } \iint_{S_2} \frac{x}{y} dA$$

(۳) فرض کنید F میدان برداری $-\frac{y}{x^2+y^2}i + \frac{x}{x^2+y^2}j$ در صفحه باشد.

(الف) نشان دهید انتگرال F روی بیضی $\{\cos(t)i + 2\sin(t)j : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ برابر است با $\int_0^{2\pi} \frac{2dt}{1+3\sin^2 t}$.
(ب) مقدار انتگرال بالا را محاسبه کنید!

(۴) فرض کنید $G(x, y, z) = (0, 0, y)$ میدان برداری در فضای سه‌بعدی باشد.

(الف) نشان دهید همه جا $\text{curl } G = (1, 0, 0)$.

(ب) نشان دهید برای هر میدان برداری هموار دیگر مثل F که همه جا به جز در مبدا مختصات $\text{curl } F = (1, 0, 0)$ ، و هر

خم بسته‌ی هموار C در صفحه‌ی xy که از مبدا نمی‌گذرد، داریم: $\oint_C F \cdot dr = 0$.

(۵) فرض کنید M سطح جانبی مخروطی با قاعده‌ی دایره‌ی واحد (دایره‌ی با شعاع یک به مرکز مبدا) در صفحه‌ی xy و

راس $(3, 0, 1)$ باشد که به سمت بیرون مخروط جهت‌دار شده است. همچنین فرض کنید k بردار استاندارد سوم در فضا

و \hat{N} بردار یکه‌ی عمود بر سطح باشد. مقدار انتگرال $\iint_M k \cdot \hat{N} dS$ را به روش‌های زیر محاسبه کنید:

(الف) با انتخاب یک پرمایش برای M و محاسبه‌ی مستقیم.

(ب) به کمک قضیه‌ی دیورژانس.

(در صورت نیاز می‌توانید از حکم قسمت اول هر سوال برای حل قسمت دوم استفاده کنید هرچند آن را نشان نداده باشید)