به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

ریاضی مهندسی

امتحان میان ترم ۱۴۰۱-۱۴۰۲ مدت زمان : سه ساعت

۱. پس از حل یک مساله اشتروم لیوویل روی بازه $[0,1]$ توانسته ایم یک پایه متعامد به صورت $sin(k_n x)$ پیدا کنیم که در آن $k_n = -tan(k_n)$ است. با استفاده از این پایه سری فوریه (تعمیم یافته) تابع $f(x) = x$ را بدست آورید. (مساله را بر حسب k_n بدست آورید و محاسبه انتگرال ها در انتها الزامیست)(۱۵ نمره)

۲. فرض کنید تابع f بر بازه $(0, \infty)$ تعریف شده است و $A(\omega)$ ضریب فوریه کسینوسی تابع f است. (۲۰ نمره)

(الف). نشان دهید $\int_0^\infty A(\omega)^2 d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)^2 dx$

(ب). با استفاده از قسمت قبل و محاسبه فرم کسینوسی تابع e^{-x} که بر بازه $(0,\infty)$ تعریف شده است، حاصل

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

را بدست آورید.

۳. معادله زیر را حل کنید. (۲۰ نمره)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \frac{1-y}{\pi} & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u_x(0,y) = y, \quad u_x(\pi, y) = 1 \\ u(x,0) = \frac{x^2}{2\pi}, \quad u(x,\pi) = \frac{1-\pi}{2\pi}x^2 + \pi x + 1 \end{cases}$$

۴. با استفاده از روش جداسازی نشان دهید چه مجموعه متعامدی برای حل مساله زیر می توان در نظر گرفت. (۱۵ نمره)
توجه کنید حل مساله مدنظر نیست و صرفا بدست آوردن پایه موردنظر برای حل سوال مدنظر است.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_t = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) - u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin(x), \end{cases}$$

۵. مساله ناهمگن زیر را به صورت کامل حل کنید. (۲۰ نمره)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = xt & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 1, \quad u_t(x,0) = 1, \end{cases}$$

۶. فرم کانونیک مساله زیر را بدست آورید. (۱۰ نمره).

$$u_{xx} - y^2 u_{yy} + u_x - u_y = xy$$

۷. مساله زیر را با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید. (۱۵ نمره).

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} & x > 0, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ \lim_{x\mapsto\infty} u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = e^{-x}, \end{cases}$$

پیوست امتحان

در صورت نیاز برای تبدیل یک PDE خطی مرتبه دوم که در فرم

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

است و تغییر متغییرهای $\epsilon = f(x,y)$ و $\eta = g(x,y)$ روی آن اعمال شده است. می توانید برای محاسبه فرم کلی PDE بعد از اعمال تغییر متغییرها از روابط زیر استفاده کنید.

$$A^* = A\epsilon_x\epsilon_x + B\epsilon_x\epsilon_y + C\epsilon_y\epsilon_y$$
$$B^* = ۲A\epsilon_x\eta_x + B(\epsilon_x\eta_y + \epsilon_y\eta_x) + ۲C\epsilon_y\eta_y$$
$$C^* = A\eta_x\eta_x + B\eta_x\eta_y + C\eta_y\eta_y$$
$$D^* = A\epsilon_{xx} + B\epsilon_{xy} + C\epsilon_{yy} + D\epsilon_x + E\epsilon_y$$
$$E^* = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y$$
$$F^* = F \text{ and } G^* = G$$

همچنین تبدیلات فوریه مقدماتی به شرح زیر می باشد.
اگر f و g توابعی به طور مطلق انتگرال پذیر و قطعه به قطعه پیوسته باشند.

$$\mathcal{F}(f(x-c)) = e^{i\omega c}\mathcal{F}(f)(\omega)$$
$$\mathcal{F}(f(cx)) = \frac{۱}{|x|}\mathcal{F}(f)(\frac{\omega}{c})$$
$$\mathcal{F}(f') = -iw\mathcal{F}(f)$$
$$\mathcal{F}(e^{iax}f) = \mathcal{F}(f)(\omega - a)$$
$$\mathcal{F}(f(x)cos(ax)) = \frac{\mathcal{F}(f)(\omega-a) + \mathcal{F}(f)(\omega+a)}{۲}$$