

تمارین درس معادلات دیفرانسیل سری چهارم

۱- نمایی e^{rt} جواب $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ است که در آن، r ریشه چندجمله ای مشخصه $p(s) = ms^2 + bs + k$ است. مفاهیم زیر را معرفی می نمایم:

فوق میرایی: ریشه های چندجمله ای مشخصه حقیقی و متمایز

تحت میرایی: ریشه ها غیر حقیقی.

میرایی بحرانی: ریشه ها برابر.

معادله $\ddot{x} + w^2x = 0$ را در نظر بگیرید. چندجمله ای مشخصه آن را تعیین کنید. ریشه های آن چه هستند؟ جواب نمایی را بیابید. بخش های حقیقی و موهومی آن را بیابید.

۲- در یک سیستم جرم-فنر مقدار $k = 25$, $m = 1$ را می دانیم اما ثابت میرایی b را نمی دانیم. مشاهده شده که برای

یک جواب مشخص از معادله $\ddot{x} + b\dot{x} + 25x = 0$ داریم $x(\frac{\pi}{6}) = 0 = x(\frac{\pi}{4})$ و برای $\frac{\pi}{6} < t < \frac{\pi}{4}$ داریم $x(t) > 0$.

الف) آیا سیستم «تحت میرایی»، «میرایی بحرانی» یا «فوق میرایی» دارد؟

ب) مقدار b را مشخص کنید.

۳- یک سینوسی میرا $x(t) = Ae^{-at} \cos(wt)$ شبه دوره $2\pi/w$ را دارد. شبه دوره و یعنی w از روی نمودار قابل اندازه گیری

است و دو برابر صفرهای متوالی $x(t)$ است. فاصله بین بیشینه های متوالی $x(t)$ چقدر است؟ آیا همواره یکسان است یا

برای هر کدام متفاوت است؟

۴- فرض کنید بیشینه $x(t) = Ae^{-at} \cos(wt)$ در $t = t_1$, $t = t_0$ رخ دهد. نسبت $x(t_1)/x(t_0)$ چقدر است؟ آیا بر

این اساس نیاز به تعیین a از روی نمودار داریم؟

۵- برای چه مقداری از b معادله $\ddot{x} + b\dot{x} + x = 0$ میرایی بحرانی دارد؟ برای این مقدار از b جواب معادله با شرایط اولیه

$x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ چیست؟ جواب با شرایط اولیه $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ اگر $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 3$ چیست؟ اگر $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$

آنگاه جواب چیست؟

۶- نوسانگر هارمونیک: نشان دهید که $\cos(wt)$, $\sin(wt)$ جوابهای معادله $\ddot{x} + w^2x = 0$ هستند.

۷- نشان دهید که تابع سینوسی کلی $A \cos(wt - \phi)$ در معادله $\ddot{x} + w^2x = 0$ صادق است.

۸- در بین توابع $x(t) = A \cos(wt - \phi)$ کدامشان در شرط $x(0) = 0$ صادق است؟ آیا این با قضیه یکتایی در تناقض

است؟

۹- اعداد x_0 , \dot{x}_0 داده شده اند. آیا می توانید پاسخی برای $\ddot{x} + w^2x = 0$ بیابید که $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ ؟ چه تعداد

از چنین پاسخ هایی وجود دارد؟

۱۰- فرض کنید r ثابتی باشد که e^{rt} یک جواب $\ddot{x} + kx = 0$ باشد. r چه باید باشد؟

۱۱- جوابی مثل x_1 برای $\ddot{x} + a^2 x = 0$ بیابید که $x_1(0) = 1, \dot{x}_1(0) = 0$. جواب دیگری مثل x_2 برای آن بیابید که $x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 1$.