

به نام خدا

تمارین درس معادلات دیفرانسیل سری سوم

۱- در صفحه مختلط $z = 1 + \sqrt{3}i$ را مشخص کنید. مختصات قطبی آن را مشخص نمایید. برای $n = 1, 2, 3, 4$ محل z^n را مشخص نموده و هرکدام را به شکل $a + bi$ و $Ae^{i\theta}$ بیان کنید. درنهایت محل z^n را برای مقادیر $n = 0, -1, -2, -3, -4$ مشخص نمایید.

۲- عدد مختلطی به شکل $a + bi$ بیابید به طوری که داشته باشیم $e^{a+bi} = 1 + \sqrt{3}i$ (در حقیقت همه‌ی نقاطی را بیابید که چنین خاصیتی را داشته باشند). می‌توانید b را عددی ثابت و مثبت و به قدر نیاز و امکان کوچک در نظر بگیرید. برای $n = 1, 2, 3, 4$ مقدار $e^{n(a+bi)}$ را بیابید. برای $n = 0, -1, -2, -3, -4$ چه می‌توان گفت؟

۳- هرکدام از توابع $f(t)$ زیر را به شکل $A \cos(\omega t - \phi)$ بنویسید. در هر حالت، با رسم مثلث راست گوشه‌ای به طول اضلاع a, b شروع کنید.

$$a) \cos 2t + \sin 2t, \quad b) \cos \pi t - \sqrt{3} \sin \pi t, \quad c) \operatorname{Re} \frac{e^{it}}{2 + 2i}$$

۴- جوابی به شکل we^t برای $\dot{x} + 2x = e^t$ بیابید. به طور مشابه برای $\dot{z} + 2z = e^{2it}$ نیز همین کار را کرده و درنهایت جواب عمومی هر دو را بیان کنید.

۵- با استفاده از نوشتن حالت مختلط و سپس جداکردن بخش حقیقی آن، جوابی برای $\dot{x} + 2x = \cos 2t$ بیابید. این کار جوابی برای $\dot{x} + 2x = \sin 2t$ نیز به دست می‌دهد.

۱- معادله دیفرانسیل $\dot{x} + 2x = 1$ را در نظر بگیرید.

الف) جواب عمومی را به سه روش جداسازی-عامل انتگرال‌ساز و استفاده از $e^{\circ t}$ برای سمت راست، محاسبه کنید.

ب) این معادله خودگردان است، خطوط فاز و بعضی جواب‌های آن را رسم کنید. مشخص کنید که نقطه تعادل از چه نوع است.

ج) با استفاده از روش اویلر در سه گام، با استفاده از شرط اولیه $x(0) = 0$ در $t = 1$ مقدار جواب را تخمین بزنید.

۲- (معادلات خودگردان) از Mathlet Phase Lines برای بررسی این سوال استفاده کنید.

برنامه‌ای توسط سازمان محیط زیست برای جلوگیری از انقراض نوعی خرگوش در زاگرس اجرا شده است که جمعیت آن از معادله لاجستیک پیروی می‌کند و جمعیت پایای آن هزار حیوان است. تأثیر این برنامه بر جمعیت این نوع خرگوش با نرخ مرگ و میر (به هر دلیل) a را بررسی می‌کنیم.

الف) این حالت توسط بالاترین گزینه در منوی Lines Phase به خوبی مدل شده است. شرح دهید که چرا این مدل‌سازی کاراست.

ب) به نظر می‌رسد که برای مقادیر مختلف a تعداد متفاوت تعادل (یک-دو-هیچ) داریم. هرکدام را محاسبه کنید. برای هر a مقادیر بحرانی y را با ذکر نوع آن (پایدار-ناپایدار-...) مشخص کنید.

ج) سازمان محیط زیست امیدوار است که حداکثر ۱۸۷.۵ عدد خرگوش به طور متوسط در سال کشته شود. مشخص کنید در این حالت جمعیت خرگوش‌ها چه خواهد شد. با این رویکرد، نقطه بحرانی‌ای که بعد از آن جمعیت منقرض می‌شود چیست؟

د) در این مقدار a جمعیت خرگوش‌ها پنج رفتار مختلف خواهند داشت. برای هر حالت یک جواب را رسم کنید که نشان دهد در مقادیر کوچک و بزرگ t رفتار جمعیت چه خواهد بود.

ح) با دقت در نمودار انشعاب این معادله و تغییر مقدار a تغییر خطوط فاز را بررسی کنید. معادله‌ای بیابید که نقاط تعادل را برای مقادیر مختلف a بدست آورد. (منظور خم‌های قرمز و سبز در Mathlet Phase Lines است)

۳- فرض کنید y نقطه بحرانی پایدار معادله $\dot{y} = (1 - y)y - a$ باشد. تغییر متغیر $u = y - y_0$ را اعمال کنید.

الف) معادله را برای متغیر جدید u بنویسید. آیا کماکان خودگردان است؟ آیا $u = 0$ نقطه بحرانی است؟

ب) برای مقادیر کوچک u می‌توانیم از توان‌های بالاتر آن (مثل u^2) چشم‌پوشی کنیم. به این کار خطی‌سازی در نزدیکی نقطه تعادل می‌گویند. معادله خطی شده در حوالی $u = 0$ چیست؟ جواب عمومی این معادله خطی خودگردان چیست؟

ج) حداقل در این حالت، وقتی جوابهای معادله اصلی خودگردان در نزدیکی نقطه تعادل هستند، جوابها به خوبی توسط

خطی سازی مدل می شوند. تخمینی برای y در نزدیکی نقطه تعادل بیابید. با استفاده از آن مادامی که $y(10) - y_0 = b$ مقادیر $y(11)$ و $y(12)$ را تخمین بزنید.

(د) فرض کنید معادله خطی $\dot{x} + p(t)x = q(t)$ خودگردان است. در مورد $p(t)$ و $q(t)$ چه می توان گفت؟