به نام خدا

تمارین معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

الف- مقدمه، جداسازی متغیرها

۱- نشان دهید هر معادله، دارای جواب مشخص شده است. (c_1, c_2 و a ثابت هستند)

$$y'' - 2y' + y = 0, \qquad y = c_1 e^x + c_2 x e^x \tag{۱}$$

$$xy' + y = x \sin x, \qquad y = \frac{\sin x + a}{x} - \cos x \tag{۲}$$

۲-خانواده‌های زیر از توابع هرکدام به چند پارامتر بستگی دارند؟

$$c_1 e^{kx} \tag{۳}$$

$$c_1 e^{x+a} \tag{۴}$$

$$c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \cos^2 x \tag{۵}$$

$$\ln(ax+b) + \ln(cx+d) \tag{۶}$$

۳- برای هریک از مسائل مقدار اولیه زیر، یک جواب صریح بیابید.

$$y' = \frac{1}{y^2 \ln x}, \qquad y(2) = 0 \tag{۷}$$

$$y' = \frac{ye^x}{x}, \qquad y(1) = 1 \tag{۸}$$

۴- مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{xy + x}{y}, \qquad y(2) = 0 \tag{۹}$$

$$\frac{du}{dt} = \sin t \cos^2 u, \qquad u(0) = 0 \tag{۱۰}$$

۵- با روش جداسازی متغیرها جواب عمومی را بیابید:

$$(y^2 - 2y)dx + x^2 dy = 0 \tag{۱۱}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 - v^2} \tag{۱۲}$$

$$y' = \left(\frac{y-1}{x+1}\right)^2 \tag{۱۳}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{1+x}}{t^2 + 4} \tag{۱۴}$$

ب–روش‌های مرتبه اول استاندارد

۱–معادلات دیفرانسیل زیر را از نظر کامل بودن بررسی کنید و جواب عمومی آنهایی که کاملند را بیابید.

$$3x^2ydx + (x^3 + y^3)dy = 0 \tag{۱۵}$$

$$(x^2 - y^2)dx + (y^2 - x^2)dy = 0 \tag{۱۶}$$

$$ve^{uv}du + ye^{uv}dv = 0 \tag{۱۷}$$

$$2xydx - x^2dy = 0 \tag{۱۸}$$

۲– با یافتن عامل انتگرال ساز معادلات زیر را حل نمایید.

$$2xdx + \frac{x^2}{y}dy = 0, \tag{۱۹}$$

$$ydx - (x + y)dy = 0, \qquad y(1) = 1 \tag{۲۰}$$

$$(t^2 + 4)dt + tdx = xdt, \tag{۲۱}$$

$$u(du - dv) + v(du + dv) = 0, \qquad v(0) = 1. \tag{۲۲}$$

۳– معادلات همگن زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{2y - x}{y + 4x} \tag{۲۳}$$

$$\frac{dw}{du} = \frac{2uw}{u^2 - w^2} \tag{۲۴}$$

$$xydy - y^2dx = x\sqrt{x^2 - y^2}dx \tag{۲۵}$$

۴– نشان دهید که با تغییر متغیری به شکل $u = \frac{y}{x^n}$ معادله $y' = \frac{4+xy^2}{x^2y}$ به حالتی جدایی پذیر تبدیل می شود. سپس آن را حل کنید.

۵-معادلات زیر با حل کنید.

$$xy' + 2y = x \tag{۲۶}$$

$$\frac{dx}{dt} - x\tan t = \frac{t}{\cos t}, \qquad x(0) = 0 \tag{۲۷}$$

$$(x^2-1)y' = 1 - 2xy \tag{۲۸}$$

$$3vdt = t(dt - dv), \qquad v(1) = 0.25 \tag{۲۹}$$

۶-معادله دیفرانسیل $\frac{dx}{dt} + ax = r(t)$ را در نظر بگیرید که در آن a یک ثابت مثبت است و $\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$. نشان دهید که اگر $x(t)$ یک جواب باشد، آنگاه $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

۷-معادله $y' = \frac{y}{y^3+x}$ را حل کنید.

۸-(معادله برنولی) معادله دیفرانسیل $y' + p(x)y = q(x)y^n$ با $n \neq 1$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که تبدیل به یک معادله خطی می شود اگر قرار دهیم: $u = y^{1-n}$.

۹- با استفاده از روشی که در سوال قبل بیان شد، معادلات زیر را حل کنید:

$$y' + y = 2xy^2 \tag{۳۰}$$

$$x^2y' - y^3 = xy \tag{۳۱}$$

۱۰- (معادله ریکاتی) ساده ترین نوع معادلات پس از معادلات خطیِ $y' = A(x) + B(x)y$ ، معادله ریکاتی است که به شکل

$$y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$$

نوشته می شود و سمت راست آن بجای تابعی خطی، تابعی درجه ۲ از y است. درحالت کلی معادله ریکاتی به سادگی قابل حل نیست. به هرحال:

الف) نشان دهید که اگر $y_1(x)$ یک جواب باشد، جواب عمومی به شکل

$$y = y_1 + u$$

است که در آن u جواب عمومی معادله برنولی نظیر است.

ب) با استفاده از روش بالا معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y' = 1 - x^2 + y^2.$$

۱۱- معادلات خودگردان درجه دو زیر را حل کنید.

$$y'' = a^2 y \tag{۳۲}$$

$$yy'' = y'^2 \tag{۳۳}$$

$$y'' = y'(1+3y^2), \quad y(0)=1, \;\; y'(0)=2. \tag{۳۴}$$

۱۲- برای هر یک از معادلات زیر، نوع آن را مشخص کنید: یعنی از چه روشی برای حل آن استفاده می کنید؟

1. $(x^3+y)\,dx + x\,dy = 0$
2. $\dfrac{dy}{dt} + 2ty - e^{-t} = 0$
3. $y' = \dfrac{x^2-y^2}{5xy}$
4. $(1+2p)\,dq + (2-q)\,dp = 0$
5. $\cos x\,dy = (y\sin x + e^x)\,dx$
6. $x(\tan y)y' = -1$
7. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{y}$
8. $\dfrac{dv}{du} = e^{2u+3v}$
9. $xy' = y + xe^{y/x}$
10. $xy' - y = x^2\sin x$
11. $y' = (x+e^y)^{-1}$
12. $y' + \dfrac{2y}{x} - \dfrac{y^2}{x} = 0$
13. $\dfrac{dx}{dy} = -x\left(\dfrac{2x^2y+\cos y}{3x^2y^2+\sin y}\right)$
14. $y' + 3y = e^{-3t}$
15. $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$
16. $\dfrac{y'-1}{x^2} = 1$
17. $xy' - 2y + y^2 = x^4$
18. $y'' = \dfrac{y(y+1)}{y'}$
19. $t\dfrac{ds}{dt} = s(1-\ln t+\ln s)$
20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3-2y}{2x+y+1}$
21. $x^2y' + xy + y^2 = 0$
22. $y'\tan(x+y) = 1-\tan(x+y)$
23. $y\,ds - 3s\,dy = y^4\,dy$
24. $du = -\dfrac{1+u\cos^2 t}{t\cos^2 t}\,dt$
25. $y' + y^2 + (2x+1)y + 1 + x + x^2 = 0$
26. $y'' + x^2y' + 3x^3 = \sin x$

ج-روشهای عددی و تصویری

۱- برای هریک از معادلات زیر با استفاده از تقریباً پنج هم‌شیب، میدان جهت را در نموداری با طول ۲- تا ۲ در هر جهت، رسم کنید. سپس با استفاده از این اطلاعات خم های انتگرال را رسم کنید.

الف) معادله را حل کرده و سپس خم انتگرال رسم شده را با یکی از جواب ها مقایسه کنید.

$$y' = -\frac{y}{x}$$

ب) جوابی را بیابید که نمودارش همزمان یک هم‌شیب هم باشد و این حقیقت را به صورت تحلیلی (و نه بر اساس تصویر) نشان دهید.

$$y' = 2x + y$$

ج) مشابه قسمت قبل حل شود.

$$y' = x - y$$

د)

$$y' = x^2 + y^2 - 1$$

ه) در هر دو محور از ۳- تا ۳ رسم کنید و خم های انتگرال گذرا از $(0,0), (-1,1), (0,-2), (-1,0)$ را رسم کنید. آیا این خم ها خط $y = -x - 1$ را قطع می کنند؟ (با استفاده از $Intersection\ Principle$ توضیح دهید.)

۲-میدان جهت معادله زیر را در ربع اول، رسم کنید

$$y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

شرح دهید که چگونه با استفاده از آن و معادله دیفرانسیل می‌توان فهمید که جواب $y(x)$ با مقدار اولیه $y(0) = 1$:

الف) تابعی نزولی برای $x > 0$ است.

ب) همیشه برای $x > 0$ مثبت است.

۳- فرض کنید $y(x)$ جواب مسئله مقدار اولیه زیر باشد.

$$y' = x - y, \qquad y(0) = 1.$$

الف) با استفاده از روش اویلر با طول گام $h = 0.1$ مقدار $y(x)$ را برای $x = 0.1, 0.2, 0.3$ تخمین بزنید. جواب شما برای $y(0.3)$ بسیار زیاد یا بسیار کم است؟

ب) با استفاده از روش اویلر بهبودیافته با همان طول گام قبل، تخمینی برای $y(0.1)$ بیابید و با جواب متناظر از قسمت قبل مقایسه اش کنید.

۴- با استفاده از روش اویلر و طول گام 0.1 جواب $y(x)$ از معادله مقدار اولیه $y' = x + y^2,\ \ y(0) = 1$ را برای

مقادیر $x=0.1, 0.2, 0.3$ تخمین بزنید. جواب شما برای $y(0.3)$ بسیار بالا یا بسیار پایین است؟

۵- برای مسئله مقدار اولیه

$$y' = x - y, \qquad y(0) = 1$$

نشان دهید که روش اویلر برای طول گام با مقادیر $h = \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \ldots$ به جواب دقیق $y(1)$ همگرا می شود. (راهنمایی: با استقرا ریاضی نشان دهید که تخمین $y(1)$ به شکل $y_n = 2(1-h)^n - 1 + nh$ خواهد بود و به راحتی خواهید دید که جواب دقیق برابر با $y = 2e^{-x} + x - 1$ است.)

۶- مسئله مقدار اولیه $y' = f(x),\ \ y(0) = y_0$ را در نظر بگیرید. می خواهیم با استفاده از روش رانگ-کوتا با طول گام h و در n گام، مقدار $y(2nh)$ را محاسبه کنیم. مقدار دقیق جواب برابر $y(2nh) = y_0 + \int_0^{2nh} f(x)dx$ است. نشان دهید جواب رانگ-کوتا با جواب بدست آمده از روش سیمپسون برابر است.

۷- مطابق قضیه وجود و یکتایی، تحت چه شرایطی روی $a(x), b(x), c(x)$ مسئله مقدار اولیه $a(x)y' + b(x)y = c(x),\ \ y(x_0) = y_0$ جواب یکتایی در بازه‌ای مثل $[x_0 - h, x_0 + h]$ خواهد داشت؟

د- کاربردهای هندسی و فیزیکی

۱-تمام خم های $y = y(x)$ را بیابید که خواص هندسی خواسته شده را داشته باشند.(از ویژگی هندسی استفاده کنید تا ODE که توسط$y(x)$ صدق می کند را بیابید و سپس آن را حل کنید)

الف) برای هر خط مماس بر خم، بخشی از آن که در ربع اول است توسط نقطه مماس به دو قسمت شده است.

ب) برای هر عمود بر خم، بخشی که بین خم و محور x است طول ثابت ۱ دارد.

ج) برای هر عمود بر خم، بخشی که بین خم و محور x است توسط محور y به دو قسمت شده است.

د) برای هر ثابت a مساحت زیر خم بین a و x متناسب با $y(x) - y(a)$ باشد.

۲-برای هر خانواده از خم های زیر:

*- معادله دیفرانسیلی را بیابید که خم انتگرالش، این خم ها باشد.

**-مسیرهای متعامد به خانواده خم های داده شده را بیابید.

***-خانواده خم اصلی و مسیر متعامدش را رسم کنید.

الف)تمام خط هایی که عرض از مبدا آن ها دو برابر شیب است.

ب) خم های نمایی $y = ce^x$.

ج) هذلولی های $x^2 - y^2 = c$.

د) خانواده دوایری که مرکز آنها محور عرضها باشد و مماس به محور طولها باشند.

۳-یک کانتینر حاوی V لیتر نمک مایع است. در زمان $t = 0$ غلظت نمک برابر c_0 گرم بر لیتر است. نمک مایع با غلظت c_1 با نرخ k لیتر بر دقیقه با تداخل آنی به آن اضافه می شود و مخلوط حاصل با نرخ یکسان در کانتینر حرکت می کند. غلظت نمک در کانتینر نسبت به زمان چگونه تغییر می کند؟ فرض کنید $x(t)$ مقدار نمک در تانک در زمان t باشد. آنگاه $c(t) = \frac{x(t)}{V}$ غلظت نمک در زمان t است.

الف) معادله دیفرانسیلی براساس $x(t)$ با شرایط اولیه بنویسید.

ب) فرض کنید آب خالص به آن اضافه شده است، معادله را حل کنید. همه ی ثوابت را یکجا برابر $a = \dfrac{k}{V}$ بگیرید.

ج) فرض کنید c_1 ثابت باشد. معادله را حل کنید. $c(t)$ را مشخص کنید و $\lim_{t\to\infty} c(t)$ را بیابید. تعبیری شهودی برای مقدار این حد ارائه دهید.

د) فرض کنید c_1 ثابت نباشد ولی با نرخ نمایی به شکل زیر در زمان کاهش یابد:

$$c_1 = c_0 e^{-\alpha t}, \qquad \alpha > 0.$$

فرض کنید $a \neq \alpha$ و با حل مسئله مقدار اولیه، $c(t)$ را مشخص کنید. جواب خود را با قراردادن $\alpha = 0$ بررسی کنید و با پاسختان به قسمت قبل مقایسه کنید.

۴- ماده ی رادیواکتیو A به ماده ی B و سپس به ماده ی C واپاشی می شود.

الف) اگر ثوابت واپاشی مواد A و B به ترتیب λ_1 و λ_2 باشند و مقادیر اولیه به ترتیب A_0 و B_0 باشند،(ثابت واپاشی با توجه به تعریف برابر (نیمه عمر/$\ln 2$) است) معادله دیفرانسیلی بیابید که $B(t)$ را (مقدار B در زمان t) مشخص کند و آنرا حل نمایید. فرض کنید $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

ب) فرض کنید $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$. مشخص کنید که چه زمانی $B(t)$ به ماکسیمم خودش می رسد.

۵- مطابق قانون سرمایش نیوتن، نرخ تغییر دمای T از یک جسم متناسب با اختلاف بین T و دمای خارج است. در زمان $t = 0$ یک کتری حاوی آب جوشان از روی اجاق برداشته می شود. پس از ۵ دقیقه دمای آب ۸۰ درجه سانتیگراد است. اگر دمای اتاق برابر ۲۰ درجه سانتیگراد باشد، چه زمانی آب به دمای ۶۰ درجه سانتیگراد می رسد؟

۶- جرم m تحت نیروی جاذبه در حال سقوط است. سرعت $v(t)$ و سرعت نهایی $\lim_{t\to\infty} v(t)$ آنرا بیابید و فرض کنید:

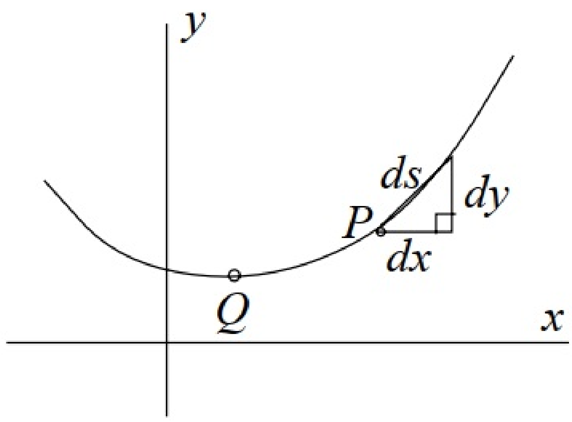
الف) مقاومت هوا برابر kv است که k ثابت بوده و برای سرعت های کم قابل توجه است.

ب) مقاومت هوا برابر kv^2 است که k ثابت بوده و برای سرعت های بالا قابل توجه است.

ثابت گرانش را g بگیرید. در قسمت (ب) همه ی ثوابت را یکجا $a = \sqrt{\dfrac{gm}{k}}$ بگیرید.

۷- یک کابل بارگذاری شده از دو نقطه اتکا آویزان شده است و Q پایین ترین نقطه روی آن است. به روی بخش QP وزن W بارگذاری شده است. کشش ثابت T_Q را در Q داریم و متغیر کشش T در نقطه P است و هر دوی W, T با نقطه P تغییر می کنند.

فرض کنید s نمایانگر طول خم QP باشد.



الف) نشان دهید

$$\frac{dx}{T_Q} = \frac{dy}{W} = \frac{ds}{T}.$$

ب) فرض کنید که کابل تنها تحت تاثیر وزن خودش باشد و $y(x)$ تابعی باشد که نمودارش همان خم آویزان کابل باشد. نشان دهید:

*- برای ثابت k

$$y'' = k\sqrt{1+y'^2}$$

**-برای ثوابت c, c_1

$$y = \sqrt{s^2+c^2}+c_1.$$

ج) مسئله پل معلق را حل کنید: وزن کابل قابل چشم پوشی است و بارگذاری دارای چگالی ثابت افقی است.

د) مسئله $Marseilles\ curtain$ را حل کنید: وزن کابل قابل چشم پوشی است و توسط میله هایی که فشرده و با فاصله یکسان هستند بارگذاری شده است، انتهای میله ها روی یک خط افقی هستند.(محور طولها را به عنوان خط در نظر گرفته و نشان دهید $y(x)$ در معادله دیفرانسیل $y'' = k^2y$ صادق است)

ه- معادلات درجه اول خودگردان

۱- برای هر یک از معادلات خودگردان $\frac{dx}{dt} = f(x)$ زیر، تصویری کیفی از جواب به شکل زیر ارائه دهید:

*-محور افقی را برای متغیر وابسته x درنظر گرفته و نقاط بحرانی معادله را روی آن مشخص کنید. با بردارها نوع حرکت بین نقاط بحرانی را مشخص نمایید. نوع هر نقطه بحرانی را مشخص نمایید.

**-با استفاده از اطلاعات تصویر اول، تصویری برای نمایش صفحه tx رسم کنید با مجموعه ای از جواب هایی برای ODE: ترسیم باید ویژگی های کیفی اصلی را نشان دهد.

(برای نمونه جواب های ثابت، یا رفتارهای حدی (مجانبی) جواب های غیر ثابت)

$$x' = x^2 + 2x \tag{۳۵}$$

$$x' = -(x-1)^2 \tag{۳۶}$$

$$x' = 2x - x^2 \tag{۳۷}$$

$$x' = (2-x)^3. \tag{۳۸}$$