به نام خدا

تمارین پیشنهادی درس معادلات دیفرانسیل

۱-یک تراشه‌ی کامپیوتری گرما را با نرخی متناسب با تفاوت دمایش با محیط اطراف، می‌تاباند (با روش تشعشع منتقل می کند).

الف) اگر دمای ثابت محیط ۲۰ درجه سانتی‌گراد باشد، معادله‌ی دیفرانسیلی بنویسید که دمای تراشه را نسبت به زمان بر حسب دقیقه، نشان دهد. معادله‌ی شما ثابتی خواهد داشت که از داده‌هایی که تاکنون داشتید، قابل دستیابی نیست.

ب) جوابِ عمومی این معادله چیست؟

ج) مشاهده شده است که اگر در زمان $t = ۰$ تراشه را خاموش کنیم (از برق قطع شود) و دمای آن در این لحظه ۷۰ درجه سانتی‌گراد باشد و دمای اتاق هم ۲۰ درجه سانتی‌گراد، در زمان $t = ۱۰$ دقیقه دمای تراشه ۶۰ درجه سانتی‌گراد خواهد شد. از این اطلاعات استفاده کرده و معادله دیفرانسیل‌تان را بروز کنید.

۲- اگر y جواب معادله دیفرانسیل $y' = y^۲ - x^۲$ با مقدار اولیه‌ی $y(۲) = ۰$ باشد، $y(۲٫۲)$ را با استفاده از روش اویلر با طولِ گام ۰٫۱ تخمین بزنید.

۳-بخشی از میدانِ جهتِ معادله دیفرانسیل $y' = y^۲ - x^۲$ در شکل ۱ در زیر آمده است.

الف) هم‌شیب‌ها را برای شیب‌های $m = -۴$ و $m = ۰$ و $m = ۴$ مشخص کنید.

ب) نمودار جواب معادله را با فرض $y(۲) = ۰$ رسم کنید.

ج) مقدار $y(۱۰۰)$ را برای جواب معادله با فرض $y(۲) = ۰$ تخمین بزنید. تخمین شما بسیار بزرگ یا بسیار کوچک است؟

د) جواب خاص y اکسترمم موضعی در $x = -۱$ دارد. در مورد $y(-۱)$ چه می‌توان گفت؟ این اکسترمم، ماکسیمم است یا مینیمم؟ بجای تکیه بر تصویر، محاسبات دقیق و کامل انجام دهید.

۴-الف) جواب عمومی $t\dot{x} + ۲x = t^۲$ را بیابید.

ب) یک جوابِ سینوسی برای معادله دیفرانسیل $\dot{x} + ۲x = \cos(۲t)$ بیابید و جوابتان را بر حسب سینوس و کسینوس نمایش دهید. برای یافتن جواب از هر روشی می‌توانید بهره جویید.

۵-الف) ریشه‌های سوم $-۸i$ را ابتدا به شکل $Ae^{i\theta}$ و سپس به شکل $a + bi$ نمایش دهید.

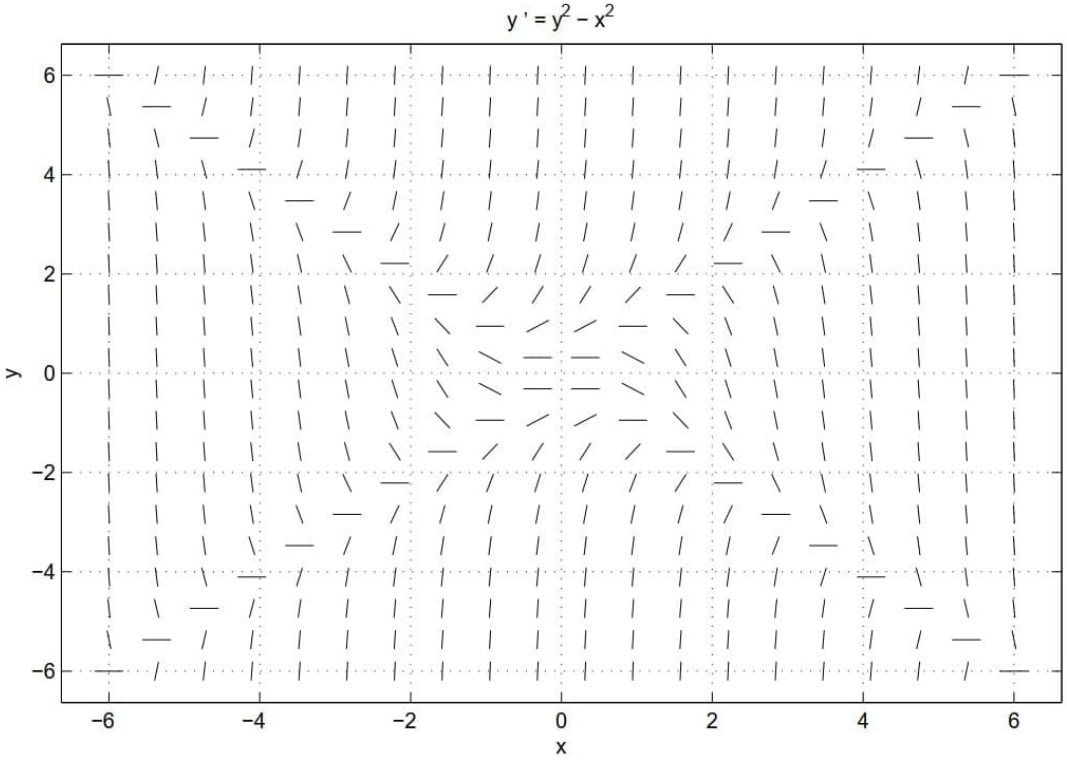
برای تابع $f(t) = -\cos(\frac{\pi}{۲}t) - \sin(\frac{\pi}{۲}t)$ به سؤالات ب-ح زیر پاسخ دهید.

ب) اعداد حقیقی مثبت A و ϕ را به گونه‌ای بیابید که $f(t) = A\cos(\frac{\pi}{۲}t - \phi)$.

ج) دوره تناوب P از این تابع سینوسی، چیست؟

د) تأخیر زمانی $t_۰$ از این تابع سینوسی، چیست؟

ح)نمودار این تابع را رسم کنید و A و P و $t_۰$ را در آن مشخص نمایید.



شکل ۱: تصویر مربوط به سوال ۲

۶-معادله خودگردان $\dot{y} = y^3 - y$ را در نظر بگیرید.

الف) خط فاز را برای این معادله رسم کنید. همه‌ی نقاط بحرانی را با بیان نوع (پایدار-ناپایدار-...) روی آن مشخص نمایید.

ب) بعضی جوابهای این معادله را رسم کنید. کافیست تنها برای هر b بین -۲ و ۲ نشان دهید یک جواب y داریم که $y(t) = b$.

ج) نقاط عطفِ جواب‌های معادله را بیابید. (تابع $f(t)$ در (a,b) نقطه عطف دارد هرگاه $f(a) = b$ و $f''(a) = ۰$.)