

به نام خدا

سری اول تمارین درس معادلات دیفرانسیل

اداره محیط زیست قصد دارد یک سیاست مناسب برای شکار خرگوش‌های یک منطقه اتخاذ کند. آنها از مدل زیر استفاده می‌کنند: نرخ طبیعی رشد جمعیت خرگوش‌ها برابر  $k$  است. فرض می‌کنیم نرخ شکار سالانه خرگوش‌ها برابر عدد ثابت  $a$  باشد.

۱- مدلی برای جمعیت خرگوش‌ها بنویسید.

۲- فرض کنید  $a = 0$ . زمان دوبرابر شدن جمعیت چقدر است؟

۳- جواب عمومی این معادله را بیابید.

۴- بررسی کنید که آیا جواب شما در معادله  $ODE$  صدق می‌کند؟

۵- یک حالت پایا (ثابت یا تعادل) وجود دارد، آنرا بیابید. آیا ارتباط جواب با  $a, k$  برای شما روشن است و منطقی است؟ چگونه؟ (واحدها درست اند و با بزرگ شدن  $a$  یا کم شدن  $k$  رفتار جواب درست است؟)

۶- حالت پایا و تعدادی جواب دیگر را رسم کنید و شرح دهید که معنای آنها چیست. نقطه تعادل ناپایدار است. برای مقادیر اولیه کمتر از نقطه تعادل، جواب منطقی نیست چرا که در واقعیت، جمعیت منفی بی معنی است. زمان  $t$  که جمعیت خرگوش‌ها منقرض می‌شوند را بیابید. مثلاً فرض کنید که مقدار  $x$  نصف نقطه تعادل باشد، زمان  $t$  را بر حسب  $k$  بیابید.

در حل و بررسی تمارین زیر هر جا که نیاز بود می‌توانید به این پیوند رجوع کنید.

یک «هم‌شیب» برای معادله دیفرانسیل  $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$  یک مجموعه جواب از معادله  $F(x, y) = m$  برای یک عدد ثابت  $m$  است. یک راه خوب برای رسم میدان‌های جهت، رسم تعدادی از «هم‌شیب» ها است مخصوصاً برای  $F(x, y) = 0$ . یک خم انتگرال، نمودار جواب است. در هر نقطه از خم انتگرال شیب خط مماس توسط مقدار  $F(x, y)$  در آن نقطه داده می‌شود. برای مثال  $ODE$  زیر را در نظر بگیرید:

$$y' = x - 2y$$

۱- صفحه مختصات را در نظر گرفته و تعدادی هم‌شیب مخصوصاً برای ثابت صفر رسم کنید. با توجه به آنها میدان جهت را بررسی کنید. با استفاده از میدان جهت تعدادی از جوابها را رسم کنید.

۲- آیا یکی از خم‌های انتگرال خط راست است؟ اگر بله، کدام خط؟ (شیب و عرض از مبدا آن را بیابید)

۳- برای یک معادله کلی مثل  $y' = F(x, y)$  اگر یک خط راست، خم انتگرال باشد، چه ارتباطی با هم‌شیب‌های معادله دارد؟ در مورد مثال ما چه می‌توان گفت؟

۴- به نظر می‌رسد که تمام جوابها در نهایت وقتی  $x \rightarrow \infty$  به یکدیگر مجانب می‌شوند. در آینده به طور دقیق‌تر آنرا بررسی خواهیم کرد ولی اکنون شرح دهید که چرا جوابها بین خطوط موازی با شیب ثابت محصور می‌شوند.

۵- نقاط بحرانی جوابهای  $y' = x - 2y$  چه اند؟ یک جواب چند نقطه بحرانی می‌تواند داشته باشد؟ برای چه مقادیری از  $y_0$  جواب‌های  $y$  با شرط آغازین  $y(0) = y_0$ ، نقطه بحرانی دارد؟ وقتی فقط یکی است، می‌نیم است یا ماکسیمم؟ طبق تصویری که دارید می‌توانید به این سوال پاسخ دهید. برای اطمینان، آیا از آزمون مشتق دوم هم می‌توانید استفاده کنید؟

۶- معادله دیفرانسیل  $y' = y^2 - x^2$  را در نظر بگیرید. دوباره تصویری بزرگ از تعدادی از هم‌شیب‌ها رسم کرده و با استفاده از آنها میدان جهت و تعدادی جواب را رسم کنید.

۷- یک *saparitix* جوابی است که جواب‌های بالا و پایین آن سرنوشتی کاملاً مجزا و متفاوت از یکدیگر دارند (با افزایش  $x$ ). معادله  $y' = y^2 - x^2$  یک *saparitix* ارائه می‌کند. آنرا رسم کرده و تفاوت رفتار جواب‌ها در بالا و پایین آن را شرح دهید.

۸- معادله  $y' = y^2 - x^2$  همچنین یک *funnel* هم ارائه می‌کند. یعنی جواب‌ها با افزایش  $x$  در محدوده خاصی به دام می‌افتند و جواب‌های بسیاری به همدیگر مجانب می‌شوند. با استفاده از یک جفت هم‌شیب این مورد را شرح دهید. تابعی بیابید که همه این جواب‌های به دام افتاده، در مقادیر بزرگ  $x$  نزدیک آن باشند.