

به نام خدا

تمرین‌ای سری یازدهم

سوال ۱. (تمرین ۶ و ۹ ص ۹۲۲ کتاب آدامز) $divF$ و $curlF$ را برای میدان‌های برداری زیر محاسبه کنید:

$$\text{الف- } F = xy^2\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$$

$$\text{ب- } F(r, \theta) = r\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$

سوال ۲. (تمرین ۱۲ ص ۹۲۲ کتاب آدامز) فرض کنید F یک میدان برداری هموار است. اگر $B_{a,b,c}$ رویه جعبه مستطیل شکل $-a \leq x \leq a$ و $-b \leq y \leq b$ و $-c \leq z \leq c$ با بردار نرمال \hat{N} باشد نشان دهید:

$$\lim_{a,b,c \rightarrow 0^+} \frac{1}{8abc} \iiint_{B_{a,b,c}} F \cdot \hat{N} dS = \nabla \cdot F(0,0,0)$$

سوال ۳. (تمرین ۱۳ ص ۹۲۲ کتاب آدامز) فرض کنید F میدان برداری دوبعدی هموار باشد و C_ϵ دایره‌ای به شعاع ϵ به مرکز مبدا باشد و \hat{N} بردار یکه نرمال به سمت بیرون بر C_ϵ باشد، در اینصورت نشان دهید:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{C_\epsilon} F \cdot \hat{N} dS = \text{div}F(0,0,0)$$

سوال ۴. (تمرین ۹ ص ۹۲۹ کتاب آدامز) فرض کنید $\hat{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $r = |\mathbf{r}|$ ، اگر f یک تابع یک متغیره و مشتقپذیر باشد نشان دهید:

$$\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r}) = rf'(r) + 3f(r)$$

اگر $f(r)r$ مارپیچ برای $r \neq 0$ (solenoidal) باشد، تابع $f(r)$ را بیابید.

سوال ۵. (تمرین ۱۸ ص ۹۲۹ کتاب آدامز) فرض کنید $\mathbf{div} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ روی دامنه D و همچنین هر نقطه در دامنه D می تواند بوسیله یک قطع خط مستقیم درون دامنه به مبدا متصل شود. فرض کنید $\mathbf{r} = tx\mathbf{i} + ty\mathbf{j} + tz\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$ یک قطعه خط پارامتری شده از مبدا به نقطه (x, y, z) درون D باشد. اگر $\mathbf{Curl} \mathbf{G} = \mathbf{F}$ درون D : $\mathbf{G}(x, y, z) = \int_0^1 t\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$ نشان دهید:

سوال ۶. (تمرین ۲ ص ۹۳۳ کتاب آدامز) انتگرال زیر را در جهت عقربه های ساعت روی خم بسته مثلث شکل به رئوس $(0,0)$ و $(1,1)$ و $(2,1)$ محاسبه کنید:

$$\oint_C (x^2 - xy)dx + (xy - y^2)dy$$

سوال ۷. (تمرین ۱۴ ص ۹۲۹ کتاب آدامز) نشان دهید:

$$\nabla \cdot (f(\nabla g \times \nabla h)) = \nabla f \cdot (\nabla g \times \nabla h)$$

سوال ۸. (تمرین ۱۰ ص ۹۳۸ کتاب آدامز) فرض کنید $\phi(x, y, z) = xy + z^2$ در این صورت شار به سمت بیرون میدان برداری $\nabla \phi$ را روی صفحه مثلث شکل با رئوس $(a, 0, 0)$ و $(0, b, 0)$ و $(0, 0, c)$ را محاسبه کنید.

سوال ۹. (تمرین ۱۹ ص ۹۳۸ کتاب آدامز) نشان دهید برای هر میدان برداری دلخواه هموار \mathbf{F} داریم

$$\oiint_{\phi} \mathbf{curl} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS = 0$$

سوال ۱۰. (تمرین ۱۰ ص ۹۴۳ کتاب آدامز) با استفاده از قضیه استوکس نشان دهید:

$$\oint_l ydz + zdy + xdz = \sqrt{3}\pi a^2$$

که در آن l تقاطع رویه‌های $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و $x + y + z = a$ است.

سوال ۱۱. (تمرین ۱۲ ص ۹۴۳ آدامز) اگر l مرز جهت دار رویه S و ϕ و ψ دو میدان اسکالر هموار باشند نشان

دهید:

$$\oint_l \psi \nabla \phi \cdot dr = - \oint_l \phi \nabla \psi \cdot dr = - \iint_S (\nabla \psi \times \nabla \phi) \cdot \hat{N} \cdot dS$$