به نام خدا

سری هفتم تمرین‌ها

سوال۱. (سوال ۳۳ ص ۷۳۴ ادامز) اگر v یک بردار غیر صفر باشد $D_v(D_v f)$ در ترم مولفه‌های v و مرتبه دوم مشتقات جزیی f بیان کنید.

سوال۲. (تمرین ۲۷ ص ۷۳۴ آدامز) فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}2x^{2x}y/(x^4+y^4) & if\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & if\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

با استفاده از تعریف حدی مشتق جهتدار نشان دهید $D_u f(0,0)$ برای هر بردار یکه $\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}$. نشان دهید $D_u f(0,0)=0$

اگر $v=0$ و $D_u f(0,0)=2u^2/v$ اگر $v\neq 0$.

با ذکر یک مثال نشان دهید حتی اگر یک تابع مشتقات سویی در هر جهتی داشته باشد ممکن است در آن نقطه پیوسته نباشد.

سوال۳. (تمرین ۷و۱۰ ص ۷۵۰ کتاب آدامز) سری تیلور توابع داده شده را بدست آورید:

الف) $(2,1)$,درجه 3 , $f(x,y)=\frac{1}{2+x-2y}$

ب) $(0,0)$,درجه4 , $f(x,y)=\cos(x+\sin y)$

سوال۴. (تمرین ۱۳و ۱۴ ص ۷۵۰ آدامز) برای توابع زیرنشان دهید معادله داده شده دارای یک حل به صورت $y=f(x)$ نزدیک نقطه داده شده با مقدار مشخص شده در آن نقطه می‌باشد, در این صورت سه جمله اول سری تیلور در نزدیکی نقطه داده شده را بنویسید.

الف) $x\sin y=y+\sin x\,,x=0$ و $f(0)=0$

ب) $\sqrt{1+xy}=1+x+\ln(1+y)\,,x=0,f(0)=0$

سوال۵. نشان دهید معادله $x+2y+z+e^{2z}=1$ دارای حل به فرم $z=f(x,y)$ نزدیک نقطه $(0,0)$ با $f(0,0)=0$ می‌باشد. سری تیلور مرتبه ۲ را برای تابع $f(x,y)$ بدست آورید.

سوال۶. (تمرین های ۱۶ و ۱۷ ص ۷۵۹ آدامز) در تابع‌های زیر نقاط بحرانی را بدست آورید.

الف) $f(x,y,z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$

ب) $f(x,y,z) = xy + x^2z - x^2 - y - z^2$

سوال۶. (تمرین ۲۱ ص ۷۵۹ آدامز) ماکزیمم و مینیمم مقدار تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x,y,z) = xyze^{-x^2-y^2-z^3}$$

چگونه می‌توانیم بدانیم چنان مقادیری وجود دارد؟

سوال۷. (سوال ۲۹ ص ۷۶۰ آدامز) فرض کنید $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$. نشان دهید مبدا یک نقطه بحرانی برای این تابع است و هر تابعی که از محدود کردن f به هر خط راست گذرنده از مبدا بدست می‌آید دارای یک مینیمم مقدار در مبدا می‌باشد. (به عبارتی $f(x,kx)$ دارای یک مینیمم موضعی در $x=0$ برای هر k می‌باشد و $f(0,y)$ هم دارای مینیمم موضعی در $y=0$ میباشد.) آیا $f(x,y)$ دارای یک مینیمم موضعی در مبدا میباشد؟ چه اتفاقی برای f در امتداد منحنی $y=2x^2$ می افتد؟ آزمون مشتق دوم در این موقعیت چه می‌گوید؟

سوال۸. (تمرین ۱۲ ص۷۶۵ آدامز) ماکزیمم و مینیمم مقدار تابع $f(x,y) = xz + yz$ را روی کره توپر واحد به مرکز مبدا بدست آورید.

سوال۹. (تمرین ۲۲ ص ۷۷۳ آدامز) با استفاده از ضرایب لاگرانژ ماکزیمم و مینیمم مقدار $xy + z^2$ را روی کره توپر واحد بدست آورید.