به نام خدا

تمرین‌های سری ششم

سوال۱.(تمرین ۲۹ و ۳۰ ص ۷۴۴ کتاب آدامز) فرض کنید f و g توابع حقیقی مقدار و مشتق پذیر باشند که روی R^2 تعریف شده‌اند می‌گوییم f و g به صورت تابعی به یکدیگر وابسته‌اند هر گاه تابعی حقیقی مقدار و مشتق پذیر روی R مانند $k(t)$ به قسمی موجود باشد که برای هر x و $y \in R$ داشته باشیم $f(x,y) = k(g(x,y))$. نشان دهید اگر f و g وابسته ی تابعی باشند آنگاه دترمینان ماتریس ژاکوبی متناظر با تناظر $(x,y) \to (f(x,y), g(x,y))$ برابر با صفر می‌باشد. حال فرض کنید توابع f و g توابعی از کلاس C^1 روی R^2 باشد و $\frac{\partial g}{\partial y}$ هیچ جا صفر نشود در این حالت نشان دهید اگر دترمینان ماتریس ژاکوبی متناظر با نگاشت $(x,y) \to (f(x,y), g(x,y))$ متحد با صفر باشد آنگاه f و g وابسته ی تابعی می‌باشند.

سوال۲. (تمرین ۱۷ ص ۷۴۳ کتاب ادامز) نشان دهید که می‌توآن دستگاه معادلات

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3 \\ x^3 z + 2y - uv = 2 \\ xu + yu - xyz = 1 \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x,y,z,u,v) = (1,1,1,1,1)$ نسبت به مجهولات x,y,z بر حسب توابعی $u\ ,v$ حل نمود و سپس مشتق‌های جزیی x,y,z را نسبت به $u\ ,v$ در نقطه $(1,1)$ بیابید. همچنین مطلوبست یافتن $\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}$ در نقطه $(1,1)$.

سوال۳.(تمرین ۲۷ ص ۷۴۴ کتاب آدامز) اگر معادلات $x = f(u,v), y = g(u,v)$ برای u,v بر حسب x,y حل شود نشان دهید:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

سوال۴. (تمرین ۱۶ ص ۷۳۳ کتاب آدامز) نشان دهید در مختصات قطبی (r,θ) گرادیان تابع $f(r,\theta)$ به صورت زیر است:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

بطوریکه $\hat{\boldsymbol{r}}$ بردار یکه در جهت مثبت بردار $r = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ می‌باشد و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردار یکه زاویه $\hat{\boldsymbol{r}}$ در جهت افزایش θ است.

سوال۵. (تمرین ۳۱ ص ۷۳۳ کتاب آدامز) اگر $\nabla f(x,y) = 0$ روی دیسک $x^2 + y^2 < r^2$ آنگاه نشان دهید تابع f روی این دیسک برابر عدد ثابت است.

سوال۶. نگاشت $z = z(x,y)$ در رابطه $z^3 - 2xz + y = 0$ صدق میکند که در آن $z(1,1) = 1$

می‌باشد. چند جمله‌ای تیلور مرتبه دوم z در نقطه $(1,1)$ را محاسبه کنید.

سوال۷. (تمرین ۲۵ ص ۷۴۳ کتاب آدامز) اگر $f(x,y,z) = 0$ نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_z = -1$$

برای $F(x,y,z,u) = 0$ و برای $F(x,y,z,u,v) = 0$ نتایج مشابه بدست آورید.