ریاضی عمومی ۱ (بهار ۱۴۰۱)

تمرین سری یازدهم

مدرس: دکتر جعفری

تمرین ۱

همگرایی و واگرایی دنباله‌های زیر را مشخص کنید و در صورت همگرا بودن حد دنباله را بیابید.

آ) $a_n = \cos(\frac{\pi n}{n+۱})$

ب) $a_n = \frac{(-۱)^{n+۱}n}{n+\sqrt{n}}$

ج) $a_n = \frac{\ln n}{\ln ۲n}$

د) $\mathbf{a}_n = \sin n$

ه) $a_n = (۱ + \frac{۲}{n})^n$

و) $a_n = \frac{\ln^۲ n}{n}$

ز) $a_n = \frac{۱.۳.۵.....(۲n-۱)}{n!}$

تمرین ۲

دنباله a_n را که با رابطه $a_{n+۱} = \sqrt{۲ + a_n}$ تعریف می‌شود و $a_۱ = \sqrt{۲}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید این دنبال صعودی است و ۳ کران بالای این دنباله است. سپس وجود حد را نشان دهید و حد آن را محاسبه کنید.

تمرین ۳

به فرض f تابعی پیوسته بر روی اعداد حقیقی باشد و $a \in \mathrm{R}$ اگر دنباله $\{a_n\}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود به عدد L همگرا باشد آنگاه باید داشته باشیم $f(L) = L$

$$a_۱ = a, \quad a_n = f(a_{n-۱})$$

.

تمرین ۴

به فرض $a > b > ۰$ باشد و $a_۱, b_۱$ به ترتیب میانگین حسابی و هندسی این دو عدد باشد. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهیم:

$$a_{n+۱} = \frac{a_n + b_n}{۲}, \quad b_{n+۱} = \sqrt{a_n b_n}$$

آ) با استفاده از استقرا نشان دهید:

$$a_n > a_{n+۱} > b_{n+۱} > b_n$$

ب) نشان دهید دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا هستند و نقطه همگرایی آن‌ها برابر است. این نقطه را میانگین حسابی-هندسی نقاط a و b می‌گوییم.

تمرین ۵

با استفاده از نوشتن مجموع جزئی سری‌های زیر به صورت سری تلسکوپی همگرایی یا واگرایی این سری‌ها رو مشخص کنید و در صورت همگرا بودن مقدار آن را به دست آورید.

آ) $\sum_n \ln \frac{n}{n+۱}$

ب) $\sum_n \frac{۱}{n^۳-۱}$

تمرین ۶

همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید و در صورت همگرا بودن مقدار سری را به دست آورید.

آ) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۴+e^{-n}}$

ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} ۳^{n+۱}۴^{-n}$

ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۳}{۵^n} + \frac{۲}{n}$

تمرین ۷

با استفاده از محک انتگرال همگرایی یا واگرایی سری‌های زیرا را مشخص کنید

آ) $\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۳}$

ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n(\ln n)^۳}$

ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\tan^{-۱} n}{۱+n^۲}$