

تمرین سری ششم

مدرس: دکتر جعفری

تمرین ۱

نقطه P به گونه‌ای حرکت می‌کند که در زمان t ، در محل تقاطع منحنی‌های $xy = t$ و $y = tx^2$ قرار دارد. نرخ تغییر فاصله P از مبدا در لحظه $t = 2$ چقدر است؟

تمرین ۲

حدود زیر را با استفاده از روش‌های مناسب محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - e^x}{x} \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)x \quad (\text{ب})$$

تمرین ۳

به فرض تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ مفروض باشد. آیا مبدا نقطه بحرانی برای این تابع است؟ آیا در این نقطه تابع دارای نقطه عطف است؟ اگر تابع دارای بردار مماس غیر عمودی در نقطه عطف باشد آیا این به معنای صفر شدن مشتق دوم تابع در آن نقطه است؟

تمرین ۴

نقاط بحرانی توابع زیر را پیدا کنید و در صورت امکان از قاعده مشتق دوم برای تعیین نوع نقطه بحرانی استفاده کنید.

$$f(x) = xe^x \quad (\text{آ})$$

$$f(x) = (x^2 - 4)^3 \quad (\text{ب})$$

تمرین ۵

آیا حد $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ وجود دارد؟ حد $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln |x|$ چطور؟ آیا می‌توان تابع $f(x) = x \ln |x|$ را در نقطه صفر طوری تعریف کرد که تابع در سراسر اعداد حقیقی پیوسته باشد؟

تمرین ۶

به فرض یک شرکت اتومبیل سازی ماهانه ۲۰۰۰ عدد ماشین را به فروش برساند. سود میانگین حاصل از فروش هر ماشین ۱۰۰۰ دلار می‌باشد. تحقیقات نشان می‌دهد که با هر ۵۰ دلار تخفیفی که شرکت به مشتریان می‌دهد ۲۰۰ عدد فروش ماشین در ماه افزایش می‌یابد. چه مقدار تخفیف را شرکت اعمال کند که سود ماهیانه خود را حداکثر مقدار ممکن کند؟

تمرین ۷

طول بزرگترین لوله‌ای را پیدا کنید که می‌تواند از یک کانال آبراه که به شکل قائم الزوایه است عبور کند. به فرض ورودی افقی دارای طول a و خروجی عمودی دارای طول b باشد. (همچنین فرض کند که لوله دارای عرض نیست.)

تمرین ۸

طول کوتاهترین مسیر از مبدا به خم $x^2 y^4 = 1$ چقدر است؟