

با یاد او

سری دوازدهم تمرینات ریاضی مهندسی

مسئله ۱. نوع هر یک از نقاط تکین هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

$$\begin{array}{ll} f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1} & \text{(ج)} \\ f(z) = \frac{z+2}{z^2(z-2)^2} & \text{(آ)} \\ f(z) = z^{-4}(\sin z^4)^{-1} & \text{(د)} \\ f(z) = \frac{1}{(e^z-1)z^2} & \text{(ب)} \end{array}$$

مسئله ۲. مانده‌های هر یک از توابع زیر را در هر یک از نقاط تکین آن محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} & \text{(ج)} \\ f(z) = \frac{(1-z^2)e^{2z}}{z^2} & \text{(آ)} \\ f(z) = \frac{z^2+1}{e^z \sin z} & \text{(د)} \\ f(z) = \frac{\tan z}{(z-\frac{\pi}{4})^2 z} & \text{(ب)} \end{array}$$

مسئله ۳. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\begin{array}{ll} \oint_{|z|=\frac{5}{4}} e^z \tan z \, dz & \text{(ج)} \\ \oint_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{\cot z}{1+z+z^2} \, dz & \text{(آ)} \\ \oint_{|z|=\frac{\pi}{4}} \frac{(z+1)\sin z}{z^2} \, dz & \text{(د)} \\ \oint_{|z|=5\pi} \tan z \, dz & \text{(ب)} \end{array}$$

مسئله ۴. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \oint_{|z|=2} z \sin \frac{1}{z} \, d\bar{z} & \text{(ج)} \\ \oint_{|z|=1} \frac{iz+1}{(z^2+1)^2(z+2i)} \, dz & \text{(آ)} \\ \oint_{|z|=1} \bar{z} \tan z \, d\bar{z} & \text{(د)} \\ \oint_{|z|=1} \bar{z} \cos \frac{1}{z} \, dz & \text{(ب)} \end{array}$$

مسئله ۵. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\begin{array}{ll} \oint_{|z|=1} e^y \, dx & \text{(ج)} \\ \oint_{|z|=1} e^{xy} \, dz & \text{(آ)} \\ \oint_{|z|=1} \cot \bar{z} \, dy & \text{(د)} \\ \oint_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} \, dx & \text{(ب)} \end{array}$$

مسئله ۶. انتگرال‌های حقیقی زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{5-4 \cos \theta} \, d\theta & \text{(ج)} \\ \int_0^{\pi} \frac{1}{4+\cos^2 \theta} \, d\theta & \text{(آ)} \\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{3+\cos^2 \theta} \, d\theta & \text{(د)} \\ \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta}{3+\sin \theta} \, d\theta & \text{(ب)} \end{array}$$

مسئله ۷. انتگرال‌های حقیقی زیر را به دست آورید.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4}{1+x^8} dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^4)^2} dx \quad (\text{د})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2} dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx \quad (\text{ب})$$

مسئله ۸. مطلوبست محاسبه

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin 4x}{(4+x^2)^2} dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx \quad (\text{د})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2} dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{1+x^4} dx \quad (\text{ب})$$

مسئله ۹. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n} x dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin \theta} d\theta \quad (\text{د})$$

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} x dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt \quad (\text{ب})$$

با یاد او

سری سیزدهم تمرینات ریاضی مهندسی

مسئله ۱. تعیین کنید هر یک از توابع زیر در کدام نقاط هم‌مدیس است.

$$\begin{array}{ll} \text{آ)} f(z) = z^4 + z^2 & \text{ج)} f(z) = e^{z^3} \\ \text{ب)} f(z) = \sin z & \text{د)} f(z) = \tan z \end{array}$$

مسئله ۲. تصویر هر یک از نواحی زیر را تحت نگاشت $w = (1-i)z + 2 - i$ به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \text{آ)} \text{خط } y = -1 & \text{ج)} \text{سه‌می } y = 1 - x^2 \\ \text{ب)} \text{دیسک } |z - 3| < 2 & \text{د)} \{x > 0, y > 0, x + 2y > 3\} \end{array}$$

مسئله ۳. تصویر هر یک از نواحی زیر را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \text{آ)} \text{هذلولی } x^2 - y^2 = 1 & \text{ج)} \{-2 < x < -1, |y| < 1\} \\ \text{ب)} \text{سه‌می } x = y^2 & \text{د)} \{y < 1 - x^2, x > 0, y > 0\} \end{array}$$

مسئله ۴. تصویر نواحی زیر را تحت نگاشت $w = z^2$ به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \text{آ)} \text{خط } x = 2 \text{ و } y = 3 & \text{ج)} \text{میدان } |z| > 1 \text{ و } |z| < \frac{\pi}{4} \\ \text{ب)} \text{خط } 2x + 3y = 1 & \text{د)} \{y > x^2, x > 0, y > 0\} \end{array}$$

مسئله ۵. تصویر نواحی زیر را تحت $w = z^3$ تعیین کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{آ)} \text{خط } x = 1 \text{ و } y = -1 & \text{ج)} \text{میدان } |z| < 1 \text{ و } |z| < \frac{\pi}{6} \\ \text{ب)} \text{خط } x + y = 1 & \text{د)} \{y > x^2, x > 0, y > 0\} \end{array}$$

مسئله ۶. تصویر نواحی زیر را تحت $w = e^z$ به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \text{آ)} \text{خط } x + y = 1 & \text{ج)} \{x > 0, y > 0, x < 1 - y^2\} \\ \text{ب)} \text{منحنی } x^2 - y^2 = 1 & \text{د)} \{0 < y < \frac{\pi}{4}, x > 0\} \end{array}$$

مسئله ۷. تصویر نواحی زیر را تحت شاخه اصلی نگاشت $w = \sqrt{z}$ به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \text{آ)} \text{خط } x - y = 1 & \text{ج)} \{x > 0, y > 0, x + y < 1\} \\ \text{ب)} \text{نیم‌دایره } x^2 + y^2 = 1, y > 0 & \text{د)} \{y > 0, y < 1 - x^2\} \end{array}$$

مسئله ۸. تصویر نواحی زیر را تحت شاخه اصلی نگاشت $w = \sqrt[4]{z}$ تعیین کنید.

- (آ) خط $x = 1$ و $y = 1$.
 (ب) خط $x + y = 1$.
 (ج) $\{x > 0, y = 1 - x^2\}$.
 (د) $\{x > 0, y > 0, x + y < 1\}$.

مسئله ۹. تصویر هر یک از میدان‌های زیر را تحت $w = \sin z$ بیابید.

- (آ) خط $x = \frac{\pi}{4}$ و $y = 1$.
 (ب) خط $x = \frac{\pi}{4}$ و $y = 0$.
 (ج) $\{y > 0, |x| < \frac{\pi}{4}\}$.
 (د) $\{1 < y < 2, |x| < \frac{\pi}{4}\}$.

مسئله ۱۰. تصویر هر یک از میدان‌های زیر را تحت نگاشت خطی $w = (1 - \sqrt{3}i)z + 3 - 2i$ با روش هندسی بیابید.

- (آ) $\{0 < r < 1, \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{4}\}$.
 (ب) $\{x > 0, y > 0, x + y < 0\}$.
 (ج) $\{1 < x^2 + y^2 < 2, y > 0\}$.
 (د) $\{x < 0, 0 < y < \pi\}$.

مسئله ۱۱. تصویر میدان $\{x > 0, 2 < y < 1 + x\}$ را با هر یک از نگاشت‌های زیر بیابید.

- (آ) $w = \frac{1}{z}$.
 (ب) $w = (1 + i)z + 2 + 2i$.
 (ج) $w = \frac{z-1}{z+1}$.
 (د) $w = (z - 2i)^3 + 2 - i$.

مسئله ۱۲. نقاط ثابت نگاشت‌های زیر را بیابید.

- (آ) $w = \frac{2z-i}{z+2i}$.
 (ب) $w = (z - i)^2 + 1 - i$.
 (ج) $w = z^3$.
 (د) $w = (z + i)^3 - i$.

مسئله ۱۳. با روش هندسی تصویر میدان $|z - 1| < 1$ را تحت هر یک از نگاشت‌های زیر بیابید.

- (آ) $w = (1 - i)z + 2 - i$.
 (ب) $w = \frac{1}{z}$.
 (ج) $w = \frac{z-2}{z}$.
 (د) $w = \frac{z-i}{z+1}$.

مسئله ۱۴. نگاشت مبیوسی را بیابید که نقاط داده شده را بر نقاط داده شده بنگارد.

- (آ) $0, 1$ و i را بر $0, 1$ و ∞ و i را بر $0, 1$ و ∞ و $-i$ را بر $0, 1$ و 2 .
 (ب) $0, 1$ را بر $0, 1$ و $-i$ را بر $0, 1$ و $1 + i$.
 (ج) $0, 1$ و i را بر $0, 1$ و 2 .
 (د) $0, 1$ و 2 را بر $0, 1$ و $-i$.

مسئله ۱۵. نگاشت مبیوسی را بیابید که $|z| < 1$ را بر $|w| < 1$ و نقطه $\frac{1}{2}$ را به 0 و نقطه 1 را بر i بنگارد.

- مسئله ۱۶.** میدان $\{z \in \mathbb{C} : x > 0, 1 < y < x\}$ را به صورت یک به یک و پوشا و همدیس بر دایره واحد بنگارید.
- مسئله ۱۷.** میدان $\{z \in \mathbb{C} : x < 1, \frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2}\}$ را به صورت یک به یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.
- مسئله ۱۸.** تصویر $\{z \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0, xy < \frac{\pi}{4}\}$ را تحت نگاشت $w = e^{z^2}$ بیابید.
- مسئله ۱۹.** میدان $\{z \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0, r < 1\}$ را به صورت یک به یک و پوشا و همدیس بر نیم صفحه بالائی بنگارید.
- مسئله ۲۰.** میدان $\{z : y > 0\} \setminus \{x = 0, 0 < y < 1\}$ را به صورت یک به یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.
- مسئله ۲۱.** میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z - 1| = 1$ را به صورت یک به یک و پوشا و همدیس بر نیم صفحه بالائی بنگارید.
- مسئله ۲۲.** میدان $\{z \in \mathbb{C} : y > 0, r < 1\}$ را به صورت یک به یک و پوشا و همدیس بر ربع اول بنگارید.
- مسئله ۲۳.** میدان $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, y > -1\}$ را به صورت یک به یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.
- مسئله ۲۴.** میدان بین دایره $|z| = 3$ و خط $x + y = 5\sqrt{2}$ را به صورت $1 - 1$ و پوشا بر میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z| = R > 1$ بنگارید.
- مسئله ۲۵.** میدان بین دو دایره $|z| = 2$ و $|z - 5| = 2$ را به صورت $1 - 1$ و پوشا بر میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z| = R > 1$ بنگارید.
- مسئله ۲۶.** نگاشت مبیوسی را بیابید که میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ را بر میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z| = R > 1$ بنگارد.
- مسئله ۲۷.** مسائل پوآسن همراه با شرایط مرزی داده شده را حل کنید.

آ.

$$T_{xx} + T_{yy} = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad x > 0, y > 0,$$

$$T \Big|_{y=0} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad T \Big|_{x=0} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

ب.

$$T_{xx} + T_{yy} = xy,$$

$$D = \{z : 1 - \frac{1}{4}y^2 < x < 4 - \frac{1}{16}y^2, \frac{1}{16}y^2 - 4 < x < \frac{1}{4}y^2 - 1\},$$

$$T \Big|_{\partial D} = xy.$$

ج.

$$T_{xx} + T_{yy} = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$D = \{z : |z| < 1, x > 0, y > 0\},$$

$$T \Big|_{x=0} = y, \quad T \Big|_{y=0} = x, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0.$$

د.

$$T_{xx} + T_{yy} = x + y,$$

$$D = \{z : |z-1| < 1, |z-i| < 1\},$$

$$T \Big|_{\partial D} = xy.$$

مسئله ۲۸. میدان D را میدان بین خط $x+y = 5\sqrt{2}$ و دایره $|z| = 4$ در نظر بگیرید. مسئله پواسن زیر را روی D حل کنید:

$$T_{xx} + T_{yy} = xy, \quad (x, y) \in D$$

$$T \Big|_{\partial D} = xy.$$

مسئله ۲۹. مسئله پواسن زیر را روی میدان $D = \{z : |z-5| > 2, |z| > 2\}$ حل کنید:

$$T_{xx} + T_{yy} = xy,$$

$$T \Big|_{\partial D} = x + y.$$

مسئله ۳۰. مسئله پواسن زیر را روی میدان $D = \{z : |z| < 1, |z - \frac{1}{4}| > \frac{1}{4}\}$ حل کنید:

$$T_{xx} + T_{yy} = x + y,$$

$$T \Big|_{\partial D} = x^2 - y^2.$$