سوال ۱

روش اول کمک پیچش (تلفیق)

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$$

$$= \sin t * \frac{1}{2}\sin(2t) = \int_0^t \sin(\tau)\,\frac{1}{2}\sin(2(t-\tau))\,d\tau$$

$$= \frac{1}{3}\sin t\,(1-\cos t)$$

10 point

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \overset{6}{=} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$= \cos t * \frac{1}{2}\sin(2t) \overset{6}{=} \sin t * \cos(2t)$$

$$= \int_0^t \sin(s)\cos(2(t-s))\,ds$$

$$= \frac{\cos t - \cos(2t)}{3}$$

10 point

روش دوم: تفکیک کسر:

a) $$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

محاسبات ساده نتیجه می‌دهد که

$$A = C = 0$$

$$B = -D = \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) = \frac{1}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - \frac{1}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\sin t\,(1 - \cos t)$$

10 point

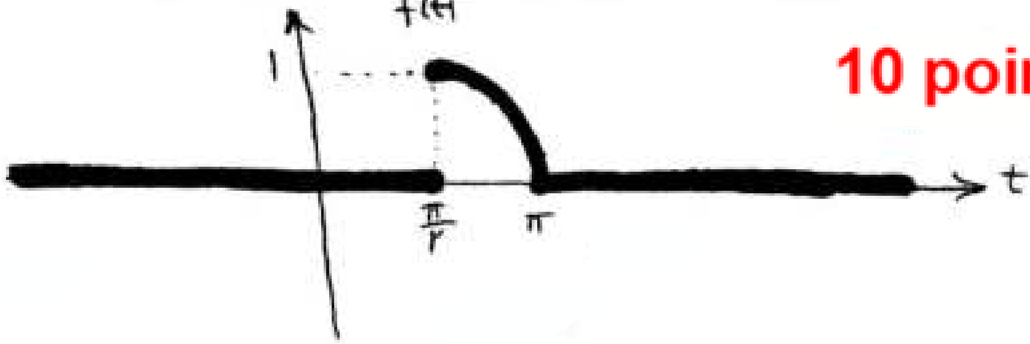
b) $$\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} = \frac{1}{3}\,\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{3}\,\frac{s}{s^2+4}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) = \frac{1}{3}\left(\cos t - \cos 2t\right)$$

10 point

سوال ۲

الف)



10 point

10 point

ب)

$$f(t)=\left[-u(t-\pi)+u\left(t-\tfrac{\pi}{2}\right)\right]\sin t$$

ج)

$$\mathcal{L}(f(t))=e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\left(\sin\left(t+\tfrac{\pi}{2}\right)\right)-e^{-\pi s}\mathcal{L}\left(\sin(t+\pi)\right)$$

$$=e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\left(\cos t\right)-e^{-\pi s}\mathcal{L}\left(-\sin t\right)$$

$$=e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}+e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

10 point

د)

$$s^2\mathcal{L}(y)+4\mathcal{L}(y)=e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}+e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow\quad \mathcal{L}(y)=e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}+e^{-\pi s}\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$\Rightarrow\quad y=\frac{1}{3}u\left(t-\tfrac{\pi}{2}\right)\left(\cos\left(t-\tfrac{\pi}{2}\right)-\cos\left(2\left(t-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$+\frac{1}{3}u(t-\pi)\left(\sin(t-\pi)\left(1-\cos(t-\pi)\right)\right)$$

10 point

$$=\frac{u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}{3}\left(\sin t+\cos(2t)\right)+\frac{u(t-\pi)}{3}\left(-\sin t\,(1+\cos t)\right)$$

سوال ۳

دستگاه همگن مربوطه:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}$$

مقادیر ویژه A : $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det A = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

بردار ویژه متناظر $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ t دلخواه

بردار ویژه متناظر $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ t دلخواه

$\Longrightarrow$ جواب معادله همگن $= X_c = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$

10 point

حال، برای پیدا کردن جواب دستگاه غیرهمگن، از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم.

داریم:

$$X' = AX + \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}}_{r(t)}$$

می‌دانیم که همهٔ جواب‌های دستگاه غیرهمگن بصورت

$$X = X_c + X_p$$

است که X_p یک جواب خاص است.

در واقع جواب خاص به کمک روش تغییر پارامتر می‌شود:

$$X_p = \mathbf{X} \int \mathbf{X}^{-1} r(t)\, dt$$

که در آن

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

ماتریس اساسی است. پس:

$$X_p = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & 3e^{-t} \end{bmatrix} \int \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{t} & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ -1 \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & 3e^{-t} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \int \begin{bmatrix} 3te^{-t} + e^{-t} \\ -te^{t} - e^{t} \end{bmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & 3e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \int (3te^{-t} + e^{-t})\,dt \\ \int -(te^{t}+e^{t})\,dt \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & 3e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t}(-3t-4) \\ -te^{t} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4t-4 \\ -6t-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t-2 \\ -3t-2 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ جواب عمومی دستگاه غیرهمگن $= X = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} -2t-2 \\ -3t-2 \end{pmatrix}$

10 point

حال اعمال شرط اولیه

$$X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نتیجه می‌دهد:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ 3c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$c_1 = 2, \quad c_2 = 0$ **10 point**

سطر ۴

$$W[y_1,y_2](t)=\det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2$$

$$\Longrightarrow \quad W[\underbrace{e^{2t}}_{y_1},\underbrace{te^{2t}}_{y_2}]=\det\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t}+2te^{2t} \end{bmatrix}$$

10 point

$$=e^{4t}(1+2t)-e^{4t}(2t)=e^{4t}>0$$

طبق مطالب از درس می‌دانیم اگر y_1 و y_2 جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$y''+A(t)y'+B(t)y=0$$

با ضرایب $A(t)$ و $B(t)$ پیوسته باشند؛

آنگاه y_1 و y_2 مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر $W[y_1,y_2](t)$ در هیچ tای صفر نشود. همچنین y_1 و y_2 وابسته خطی‌اند اگر و فقط اگر $W[y_1,y_2]$ متحد صفر باشد.

حال چون $y_1=e^{2t}$ و $y_2=te^{2t}$ جواب‌های

$$y''-4y'+4y=0$$

هستند و همچنین

$$W[y_1,y_2]=e^{4t}\neq 0$$

10 point پس y_1 و y_2 مستقل خطی‌اند.

سوال ۵

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 10y = q(t) \\ y(0) = 0 \quad \text{و} \quad y'(0^-) = 0 \end{cases}$$

الف) می‌دانیم که فرض است پاسخ را برای $q(t) = \delta(t)$، یعنی ورودی دلتای دیراک، یا ضربه واحد در زمان صفر پیدا کنیم و پاسخ برای ورودی دلخواه q، بصورت

$$y = y(t) = \left(\begin{matrix}\text{پاسخ مدار} \\ \text{با ورودی } \delta(t)\end{matrix}\right) * q(t)$$

خواهد بود. فرض کنید پاسخ مدار با ورودی $\delta(t)$، $W(t)$ باشد، پس

$$s^2 \mathcal{L}(W(t)) + 6s\,\mathcal{L}(W(t)) + 10\,\mathcal{L}(W(t)) = \mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(W(t)) = \frac{1}{s^2 + 6s + 10}$$

$$\Longrightarrow \quad W(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 6s + 10}\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^2 + 1}\right) = e^{-3t} \sin t$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{matrix}\text{پاسخ مدار برای} \\ \text{ورودی } q(t)\end{matrix} = e^{-3t} \sin t * q(t)$$

$$= \int_0^t e^{-3\tau} \sin \tau \; q(t-\tau)\, d\tau$$

ا با تبدیل جابجایی عمل پیچش (تلفیق)،

پاسخ صفر برای ورودی $q(t)$

$$= \int_{۰}^{t} q(\tau)\, e^{-۳(t-\tau)} \sin(t-\tau)\, d\tau$$

10 point

ب)

پاسخ صفر برای ورودی $q(t)=u(t-\pi)e^{-۳t}\cos t$

$$= \int_{۰}^{t} u(\tau-\pi)\, e^{-۳\tau}\cos\tau\; e^{-۳(t-\tau)} \sin(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \begin{cases} ۰ & t \le \pi \\ \underbrace{\int_{\pi}^{t} e^{-۳t}\cos\tau \sin(t-\tau)\, d\tau}_{} & t \ge \pi \end{cases}$$

محاسبهٔ این انتگرال

10 point

$$e^{-۳t}\int_{\pi}^{t} \cos\tau \sin(t-\tau)\, d\tau = e^{-۳t}\int_{\pi}^{t} \cos\tau \left(\sin t\cos\tau - \cos t \sin\tau\right) d\tau$$

$$= -\frac{e^{-۳t}\sin t}{۲}(\tau-\pi)$$

$$= e^{-۳t}\sin t \int_{\pi}^{t} \cos^{۲}\tau\, d\tau - e^{-۳t}\cos t \int_{\pi}^{t} \cos\tau \sin\tau\, d\tau$$

$$= e^{-۳t}\sin t \left(\frac{\tau}{۲} + \frac{\sin ۲\tau}{۴}\Big|_{\pi}^{t}\right) - e^{-۳t}\cos t\left(\frac{\sin^{۲}\tau}{۲}\Big|_{\pi}^{t}\right)$$

$$= e^{-۳t}\sin t\left(\frac{t}{۲} + \frac{\sin ۲t}{۴} - \frac{\pi}{۲}\right) - e^{-۳t}\cos t\left(\frac{\sin^{۲} t}{۲}\right) = -\frac{e^{-۳t}\sin t}{۲}(t-\pi)$$

سوال ۲

$$b=1 \Rightarrow \begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

معادله مشخصه A : $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

$$\Rightarrow \lambda = -1 , \quad \lambda = -4$$

بردار ویژه متناظر $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

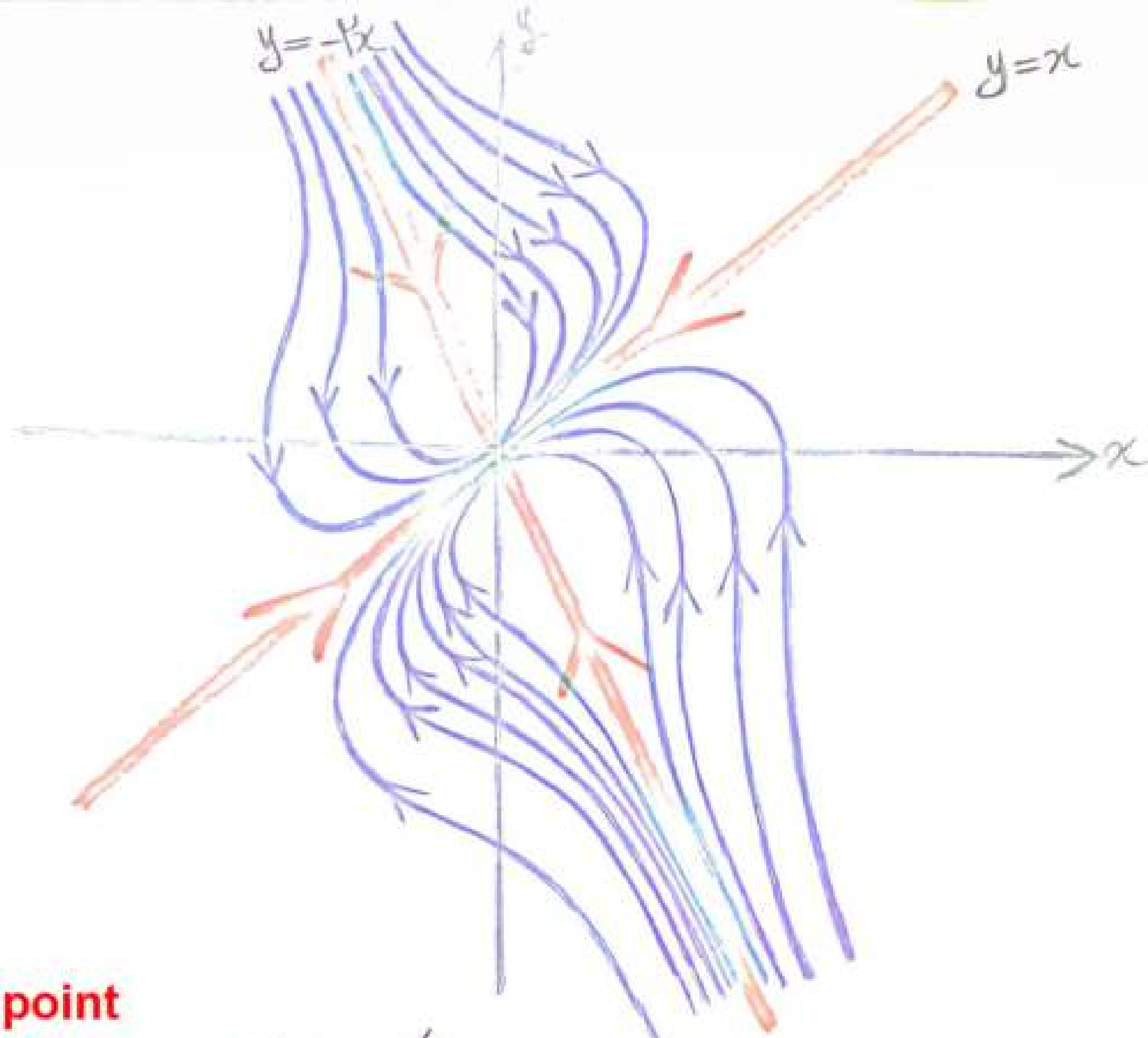
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ t دلخواه

بردار ویژه متناظر $\lambda = -4$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ t دلخواه

10 point

$\Rightarrow$ جواب عمومی دستگاه همگن $= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t}$



10 point

گره پایدار حاصل (چاه)

$$b=-1 \implies \begin{cases} x' = -۲x - y \\ y' = ۲x - ۳y \end{cases}$$

$$\implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -۲ & -۱ \\ ۲ & -۳ \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

معادله مشخصه A : $\lambda^۲ + ۵\lambda + ۸ = ۰$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 32}}{2} = \frac{-5}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

بردار ویژه متناظر

مسئله

$\lambda = -\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$

$$: \begin{pmatrix} -2-\left(-\frac{5}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right) & 1 \\ 2 & -3-\left(-\frac{5}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{7}i}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

t دلخواه

پس

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{7}i}{2} \\ -2 \end{pmatrix} e^{\left(-\frac{5}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t}$$

یک جواب مختلط است، و قسمت حقیقی و موهومی آن، دو جواب حقیقی مستقل خطی ارائه می‌دهد. یعنی برای یافتن همهٔ جواب‌های دستگاه، قسمت حقیقی و موهومی

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right] e^{-\frac{5}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

را بسط می‌کنیم. ساده شده عبارت قبلی می‌شود:

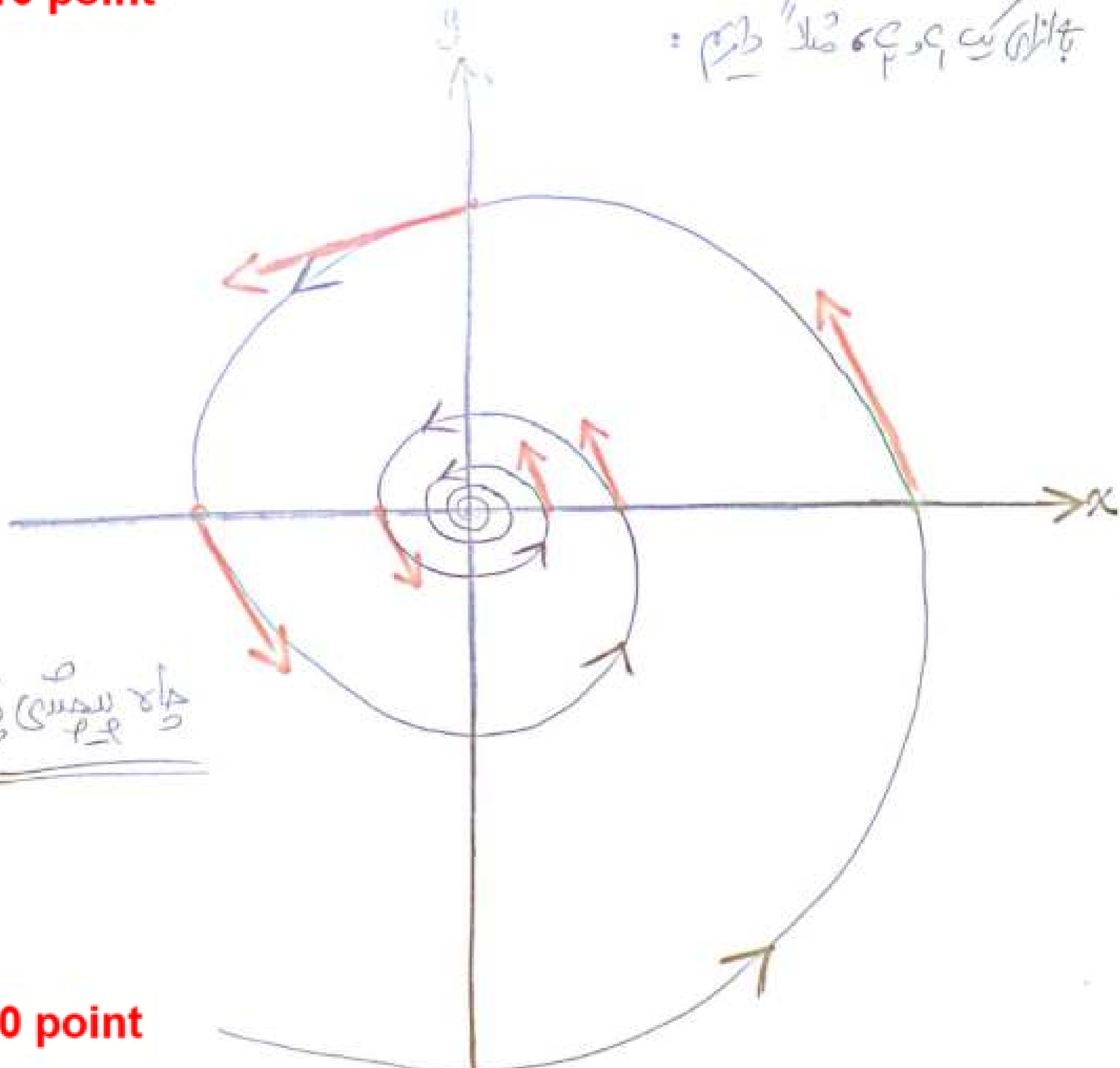
$$e^{-\frac{5}{2}t}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + e^{-\frac{5}{2}t} i\left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

پس جواب‌های دستگاه چنین می‌شوند:

$$X = e^{-\frac{5}{2}t}\left(c_1 \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \sqrt{7}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t}{2} \\ -2\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{7}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \sin\frac{\sqrt{7}}{2}t}{2} \\ -2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t \end{pmatrix} \right)$$

10 point

به ازای یک c_1 و c_2 خاص مثلاً داریم:



10 point

تصویر خم‌های دیگر به ازای c_1 و c_2های مختلف هم به صورت مارپیچی فوق هستند ولی می‌دانیم
خم‌های مختلف یکدیگر را قطع نمی‌کنند.