



۱- تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید. (جدول تبدیل لاپلاس در پشت صفحه)

$$a) \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}, \quad b) \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$۲- تابع  $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin t, & \frac{\pi}{4} \leq t \leq \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$  را در نظر بگیرید.$$

الف)  $f(t)$  را رسم کنید.

ب)  $f(t)$  را بر حسب توابع پله واحد بازنویسی کنید.

ج) مطلوبست محاسبه  $\mathcal{L}(f(t))$  (تبدیل لاپلاس تابع  $f(t)$ ).

د) با استفاده از نتایج قسمت (ج) مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی  $y'' + 4y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$  را حل نمایید.

$$۳- دستگاه \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + t \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y - 1 \\ x(0) = 0, y(0) = 0. \end{cases}$$
 را با استفاده از روش تغییر پارامترها حل کنید.

۴- فرض کنید  $y_1 = e^{2t}$  و  $y_2 = te^{2t}$ . کدامیک از عبارات زیر درخصوص  $W(y_1, y_2)$

رونسکین  $y_1$  و  $y_2$  درست است؟ دلیل پاسخ خود را شرح دهید.

الف)  $W(y_1, y_2) = e^{4t}$  بنابراین  $y_1$  و  $y_2$  مستقل خطی اند.

ب)  $W(y_1, y_2) = e^{4t}$  بنابراین  $y_1$  و  $y_2$  وابسته خطی اند.

ج)  $W(y_1, y_2) = 0$  بنابراین  $y_1$  و  $y_2$  مستقل خطی اند.

د)  $W(y_1, y_2) = 0$  بنابراین  $y_1$  و  $y_2$  وابسته خطی اند.

۵- فرض کنید یک مدار الکتریکی با معادله‌ی مفسر  $\begin{cases} y'' + 6y' + 10y = q(t) \\ y(0) = 0, y'(0^-) = 0. \end{cases}$  که در آن

$q(t)$  سیگنال ورودی و  $y(t)$  پاسخ مدار است، مد نظر باشد.

الف) پاسخ مدار را برای هر ورودی  $q(t)$  به صورت یک فرمول انتگرالی بنویسید.

ب) یک جواب خاص برای مسئله‌ی بالا وقتی  $q(t) = u(t - \pi)e^{-3t} \cos t$  ارائه دهید.

۶- رخساره‌ی فاز (خم‌های جواب) دستگاه زیر را به‌ازای  $b = \pm 1$  به‌صورت تقریبی

رسم و جهت حرکت خم‌های جواب را تعیین نمایید. نوع و پایداری نقطه بحرانی سیستم

یعنی مبدأ مختصات را تعیین کنید (چاه، چشمه، زینی و پیچشی).

$$\begin{cases} x' = -2x + by, \\ y' = 2x - 3y. \end{cases}$$