## تمرینات سری هشتم و نهم (نیمسال دوم ۰۰-۹۹) — ریاضی ۲

---

**سوال ۱** . حاصل انتگرال های زیر را به دست آورید.

الف) $\int\int_{x^2+y^2\leq 1}(4x^2y^3 - x + 5)dA$

ب) $\int\int_{|x|+|y|\leq 1}(x^3cos(y^2) + 3sin(y) - \pi)dA$

ج) $\int\int_{x^2+y^2\leq a^2}(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})dA$

چ) $\int\int_{S}(1 - x - y)dA$ جایی که $S$ مثلثی به رئوس (۰,۰) ، (۱,۰) و (۰,۱) است.

ح) $\int\int_{S}(\frac{x}{y}e^{y})dA$ جایی که $S$ ناحیه $x^2 \leq y \leq x$ , $0 \leq x \leq 1$ است.

خ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{y}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{sin(x)}{x})dA$

د) $\int_{0}^{1}\int_{x}^{1}(\frac{y^{\lambda}}{x^2 + y^2})dA$ جایی که $\lambda > 0$

**سوال ۲** . حجم جسم های زیر را با استفاده از انتگرال دو گانه به دست آورید.

الف)زیر رویه $z = 1 - x^2 - y^2$ و بالای ناحیه $x + y \leq 1 \quad 0 \leq y \quad 0 \leq x$

ب)زیر رویه $z = 1 - y^2$ و بالای ناحیه $z = x^2$

ج)داخل دو استوانه $y^2 + z^2 = a^2$ و $x^2 + y^2 = a^2$

د) زیر سطح $z = \frac{1}{x + y}$ و بالای ناحیه در صفحه $xy$ و کراندار به $x = 1, x = 2$ و $y = x, y = 0$

**سوال ۳** . درستی تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$\int_{0}^{2}\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin(\frac{\pi x}{2y})\,dydx + \int_{2}^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin(\frac{\pi x}{2y})\,dydx = \frac{16}{\pi^3}.$$

**سوال ۴** . فرض کنید $f(x,t)$ و $f_x(x,t)$ روی بازه $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ پیوسته هستند. تعریف می کنیم :

$$g(x) := \int_c^d (f(x,t))dt \quad G(x) := \int_c^d (f_x(x,t))dt$$

ثابت کنید روی $a \leq x \leq b$ $\qquad g'(x) = G(x)$

**سوال ۵** . مقدار انتگرال های ناسره زیر را حساب کنید.

الف) $\int\int_{R^2} (e^{-(|x|+|y|)})dA$

ب) $\int\int_T (\frac{e^{-\frac{y}{x}}}{x^3})dA$ که در آن $T$ ناحیه $x \geq 1$ , $0 \leq y \leq x$ است.

**سوال ۶** . آیا تابع $f(x,y) = x$ روی ناحیه $0 \leq x < \infty$ , $0 < y < \frac{1}{1-x^2}$ مقدار میانگین دارد؟ اگر جواب مثبت است آن را پیدا کنید.

**سوال ۷** . به ازای کدام مقدار $k$ ،انتگرال زیر همگراست؟

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} (\frac{1}{(x^2+y^2)^k})dA$$

**سوال ۸** . حجم بین نواحی زیر را به دست آورید.(با استفاده از مختصات قطبی)

الف) $z^2 + x^2 + y^2 = a^2$ و $x^2 + y^2 = ax$

ب) $z = x^2 + y^2$ و $3z = 4 - x^2 - y^2$

**سوال ۹** . نشان دهید اگر $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$، آن‌گاه:

$$J^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dxdy.$$

با یک محاسبه در مختصات قطبی نتیجه بگیرید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

**سوال ۱۰** . **الف)** حاصل انتگرال مکرر زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-2}^{0}\left\{\int_{0}^{x+2}\frac{e^{x^2+y^2}}{e^{2xy}}\,dy\right\}dx.$$

(راهنمایی: قرار دهید $x-y=u$ و $x=v$.)

ب) انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{0}^{2}\left\{\int_{0}^{2}\left\{\int_{\frac{y}{2}}^{1} ze^{\frac{y}{x}}\,dx\right\}dz\right\}dy.$$

**سوال ۱۱** . حاصل انتگرال های زیر را به دست آورید.

الف) $\iiint_{R^3}(e^{-x^2-2y^2-3z^2})dV$

ب) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x}\int_{y}^{1}\frac{\sin(\pi z)}{z(2-z)}\,dzdydx$

ج) $\iiint_{B}(z)dV$ که در آن $B$ ناحیه $x^2+y^2\leq z\leq\sqrt{2-x^2-y^2}$ می باشد.

د) $\iiint_{B}(x^2+y^2+z^2)dV$ که در آن $B$ استوانه $0\leq z\leq h, x^2+y^2\leq a^2$ است.

**سوال ۱۲** . حجم اجسام داده شده را با استفاده از انتگرال سه گانه به دست آورید.

الف) ناحیه واقع در داخل استوانه $x^2+4y^2=4$ ، بالای صفحه $xy$ و پایین صفحه $z=x+2$

ب) داخل بیضی گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ و بالای صفحه $z=b-y$

**سوال ۱۳** . مختصات مرکز جرم قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=9$ که در مختصات استوانه‌ای بین صفحات $\theta=\frac{\pi}{4}$ و $\theta=-\frac{\pi}{4}$ است را بدست آورید.

**سوال ۱۴** مرکزوار ناحیه $x\geq 0$ را زمانی‌که تابع چگالی در نقطه $(x,y)$ برابر است با $\delta(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ است، بدست آورید.

**سوال ۱۵** . ابتدا نشان دهید:

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\frac{1}{1-xy}\,dxdy=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}.$$

سپس با دوران ناحیهٔ انتگرال‌گیری $D=\{(x,y)\,:\,0\leq x\leq 1,\,0\leq y\leq 1\}$ به اندازهٔ ۴۵ درجه نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6}.$$