تمرینات سری پنجم و ششم (نیمسال دوم ۰۰ـ۹۹) ریاضی ۲

سوال ۱ . با ترکیب روابط زیر، متغیر z تابعی از متغیرهای t و u و s می باشد. برای این تابع $\frac{\partial z}{\partial u}$ را با استفاده از قاعده زنجیره ای (نه به دست آوردن رابطه z بر حسب t, u, s) را در نقطه $(t, u, s) = (۰, ۱, -۱)$ به دست آورید.

$$z = xyu + sin(u + y - ۳)$$

$$x = cos(s + u) + s + y^۲$$

$$y = t^۲ + u^۲ + e^t$$

سوال ۲ . فرض کنید $z = f(x, y)$ اگر $x = s + \frac{۱}{t}$ و $y = s + t$ عبارت $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}$ را بر حسب مشتق های z نسبت به متغیرهای s و t به دست آورید.

سوال ۳ . تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ در مبدأ برابر با صفر و در نقاط غیر از مبدأ با ضابطهٔ $f(x, y) = \frac{۲x^۲y}{x^۴ + y^۲}$ تعریف شده است. نشان دهید f در مبدأ پیوسته نیست. لیکن برای هر بردار یکهٔ $r = u\vec{i} + v\vec{j}$ مشتق سویی f در راستای r وجود دارد. به‌ازای چنین r بیان شده‌ای یک رابطه برای به‌دست آوردن مشتق سویی f در راستای r ارائه نمایید.

سوال ۴ . نگاشت $z = z(x, y)$ در رابطه $z^۳ - ۲xz + y = ۰$ صدق می کند که در آن $z(۱, ۱) = ۱$ می باشد. چند جمله ای تیلور مرتبه دوم z در نقطه $(۱, ۱)$ را محاسبه کنید.

سوال ۵ . نشان دهید که در همسایگی نقطهٔ $x = ۰$ می‌توان y را به‌عنوان تابعی از x چنان در نظر گرفت که $y(۰) = ۰$ و به‌ازای xهای به‌قدر کافی نزدیک به صفر رابطهٔ $x \sin y(x) = y(x) + \sin x$ برقرار باشد. سه جملهٔ اول مخالف صفر سری تیلور $y(x)$ حول صفر را بیابید.

$\boxed{\text{سوال ۶}}$. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر با این ویژگی باشد که در هر نقطه در $\mathbb{R}^۲$ طول بردار گرادیان f برابر با $\sqrt{۲}$ است.فرض کنید تابع حقیقی مقدار g روی $\mathbb{R}^۲$ توسط رابطه $g(x,y) = f(xy, \frac{۱}{۲}(x^۲ - y^۲))$ تعریف شده باشد.اعداد حقیقی a, b را به قسمی بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$a(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y))^۲ - b(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y))^۲ = x^۲ + y^۲$$

$\boxed{\text{سوال ۷}}$ فرض کنید f, g توابعی حقیقی مقدار و مشتق پذیر باشند که روی $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده اند.میگوییم f, g بطور تابعی به یکدیگر وابسته هستند هر گاه تابعی حقیقی مقدار و مشتق پذیر روی $\mathbb{R}$ مانند $k(t)$ به قسمی موجود باشد که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x,y) = k(g(x,y))$.نشان دهید اگر f, g وابسته تابعی باشند آنگاه دترمینان ماتریس ژاکوبی متناظر با تناظر $(x,y) \to (f(x,y), g(x,y))$ برابر با صفر می باشد.
حال فرض کنید f, g توابعی از کلاس $C^۱$ روی $\mathbb{R}^۲$ باشند و $\frac{\partial g}{\partial y}$ هیچ جا صفر نشود.در این حالت نشان دهید اگر دترمینان ماتریس ژاکوبی متناظر با نگاشت $(x,y) \to (f(x,y), g(x,y))$ متحد با صفر باشد آنگاه f, g بطور موضعی وابسته تابعی می باشند.

$\boxed{\text{سوال ۸}}$. نگاشت $z = z(x,y)$ در رابطه $f(x+y+z, x^۲+y^۲+z^۲)$ صدق می کند.مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ بر حسب x, y, z و مشتقات f در صورتی که $\frac{\partial f}{\partial x} + ۲z\frac{\partial f}{\partial y} \neq ۰$

$\boxed{\text{سوال ۹}}$. معادله $f(x,y,z) = ۰$ را در نظر بگیرید که نقطه p در آن صدق می کند و رابطه $\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq ۰$ برای آن برقرار است. پس در همسایگی از p ،یک متغیر را می توان بر حسب دو متغیر دیگر بیان کرد. فرض کنید $z = z(x,y)$ در معادله $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} - (\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y})^۲ = ۰$ صدق می کند. نشان دهید نگاشتهای $x = x(y,z)$ و $y = y(x,z)$ نیز در معادله ای مشابه صدق می کنند.(یعنی نقش های x, y, z عوض می شود.)

$\boxed{\text{سوال ۱۰}}$. فرض کنید:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sin(xy)}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

الف) وجود پیوستگی و مشتقات جزیی را در نقطه مبدا بررسی کرده و در این نقطه گرادیان را محاسبه کنید.

ب) با استفاده از تعریف مشتق جهتی، $\nabla_u f(۰,۰)$ را که در آن $u = \dfrac{i+j}{\sqrt{۲}}$ حساب کنید.

$\boxed{\text{سوال ۱۱}}$. نگاشت $f : R \to R$ دو بار مشتق پذیر است.مستقیما تحقیق کنید نگاشت $U(x,y,z,t) = \dfrac{f(r-ct)}{r}$ در معادله زیر صدق می‌کند.

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial t^۲} = c^۲ (\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ U}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ U}{\partial z^۲})$$

که در آن $r = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ و $c \in R$ مقدار ثابت است.

$\boxed{\text{سوال ۱۲}}$ نشان دهید که می توان دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} xy^۲ + zu + v^۲ = ۳ \\ \\ x^۳z + ۲y - uv = ۲ \\ \\ xu + yv - xyz = ۱ \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x,y,z,u,v) = (۱,۱,۱,۱,۱)$ نسبت به مجهولات x,y,z بر حسب توابعی از u,v حل نمود و سپس مستق های جزئی x,y,z را نسبت به u,v در نقطه $(۱,۱)$ بیابید.همچنین در نقطه $(۱,۱)$ مطلوبست یافتن $\dfrac{\partial^۲ z}{\partial v^۲}$.

سوال ۱۳ . نگاشت $U=f(x,y,z,t)$ دارای مشتقات پاره‌ای دوم پیوسته است و $L_۱$ و $L_۲$ و $L_۳$ بردارهای واحد و دو به دو برهم عمود هستند.نشان دهید:

الف) $$(\frac{\partial U}{\partial L_۱})^۲+(\frac{\partial U}{\partial L_۲})^۲+(\frac{\partial U}{\partial L_۳})^۲=(\frac{\partial U}{\partial x})^۲+(\frac{\partial U}{\partial y})^۲+(\frac{\partial U}{\partial z})^۲$$

ب) $$\frac{\partial^۲ U}{\partial L_۱^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial L_۲^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial L_۳^۲}=\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial z^۲}$$

سوال ۱۴ . نشان دهید هر صفحه مماس بر رویه $xyz=m^۲$ با صفحات مختصات، هرمی با حجم ثابت می‌سازد.

سوال ۱۵ . U و V را به ترتیب قسمت حقیقی و موهومی Z^n میگیریم که در آن $Z=x+iy$ است. تساوی‌های زیر را تحقیق کنید.

الف) $$\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial y^۲}=۰ \quad , \quad \frac{\partial^۲ V}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ V}{\partial y^۲}=۰$$

ب) $$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

ج) تساوی های قسمت ب را در دستگاه مختصات قطبی، یعنی بر حسب مشتقات پاره‌ای r و Θ بازنویسی کنید.

سوال ۱۶ . فرض کنید دما در $R^۳$ از قانون $T(x,y,z)=x^۲+y^۲+۲z^۲$ تبعیت می‌کند.

الف) حشره ای روی کره ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ متر حرکت می‌کند. اگر حشره در زمان $t=۰$ در مکان $(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}})$ قرار داشته و اندازه سرعت آن $۵\frac{m}{s}$ باشد، در چه جهتی حرکت کند که بیشترین تغییرات دما را احساس کند.

ب) مسیر حشره دیگری را با $\gamma(t)$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم رابطه $\gamma'(t)=\frac{\nabla T}{||\nabla T||^۲}$ برای آن برقرار است. اگر حشره در زمان $t=۰$ در مکان $(۱,۰,۰)$ باشد، ۲۰ ثانیه بعد چه دمایی را احساس می‌کند؟