تمرینات سری دوم و سوم (نیمسال دوم ۰۰ ـ ۹۹) ریاضی ۲

سوال ۱ . نوع رویه های زیر را مشخص کنید.(با رسم شکل)

الف) $x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ - ۲x + ۴z - ۲۲ = ۰$

ب) $۵x^۲ + ۶y^۲ + ۴z - ۴x = ۱۴$

ج) $-x^۲ + y^۲ - z^۲ - ۲x + ۲z = ۰$

د) $x = z^۲$

سوال ۲ . الف) با استفاده از شکل منحنی $z = y - \frac{۱}{۳}y^۳$ در صفحه yz ،نمودار نگاشت $z = y - \frac{۱}{۳}y^۳ - x^۲$ را رسم کنید.(با ذکر دلیل)

ب) با استفاده از شکل نمودار نگاشت مذکور، منحنی های تراز آن را توصیف کنید.

سوال ۳ . معادله $۲x^۲ + y^۲ = ۱$ نمایش یک استوانه با مقاطع عرضی بیضوی در صفحات عمود بر محور z است. بردار a را چنان بیابید که صفحات عمود بر a، این استوانه را در یک دایره قطع کنند.

سوال ۴ . سرعت، تندی و شتاب ذره با موضع $r(t)$ را در زمان t بیابید و مسیر ذره را توصیف کنید.

الف) $r(t) = ۳cos(t)i + ۴sin(t)j + tk$

ب) $r(t) = ti + t^۲j + t^۲k$

ج) $r(t) = t^۲i + k$

سوال ۵ . خم پارامتری زیر را توصیف کرده و طول خم بین $t = ۰$ و $t = T$ را به دست آورید.

$$x = asin(t)cos(t) \qquad , \qquad y = asin^{۲}(t) \qquad , \qquad z = bt$$

سوال ۶ . نشان دهید اگر حاصل ضرب نقطه‌ای سرعت و شتاب یک ذره متحرک، مثبت(یا منفی) باشد، تندی ذره صعودی(یا نزولی)است.

سوال ۷ . نشان دهید اگر بردار سرعت ذره در هر لحظه بر خط مشخص شده با یک نقطه ثابت p و مکان ذره در آن لحظه عمود باشد، مسیر حرکت ذره روی یک کره قرار دارد.

سوال ۸ . صفحه $x+y+z = ۱$ کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = ۱$ را در دایره C قطع می‌کند.مرکز و شعاع این دایره را بیابید. همچنین دو بردار یکه عمود بر هم که موازی صفحه C باشد را پیدا کنید. (راهنمایی : بردار $V_۱ = \frac{(\mathbf{i}-\mathbf{j})}{\sqrt{۲}}$ یک چنین برداری است.با استفاده از آن بردار دوم $V_۲$ را بیابید.)حال به کمک این دو بردار دایره C را به صورت پارامتری بنویسید.

سوال ۹ . منحنی $\phi : [۰, ۱] \to R^{۳}$ در رابطه $\phi'(t) = c \times \phi(t)$ صدق می کند که در آن c یک بردار ثابت ناصفر است. نشان دهید تصویر ϕ در $R^{۳}$ روی یک دایره قرار دارد و همچنین طول خم ϕ را بین ۰ تا T به دست آورید.

سوال ۱۰ . وجود حد را در توابع زیر بررسی کنید.

الف) $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{sin(xy)}{(x^{۲}+y^{۲})}$

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{x^{۲}(y-۱)^{۲}}{(x^{۲}+(y-۱)^{۲})}$

سوال ۱۱ . الف) چه شرایطی باید بر اعداد صحیح نامنفی m و n و p بگذاریم تاوجود حد زیر تضمین شود.

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^m y^n}{(x^۲+y^۲)^p}$$

ب) تمام ثابت های حقیقی a,b,c را به قسمی بیابید که به ازای آنها حد زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{xy}{ax^۲+bxy+cy^۲}$$

سوال ۱۲ . الف) بزرگترین ناحیه ای در $R^۲$ را مشخص کنید که بتوان $Log_x(x+y)$ را روی آن تعریف کرد و بررسی کنید که در کدام نقطه از ناحیه مذکور، $Log_x(x+y)$ پیوسته است.

ب) وجود حد نگاشت مذکور را وقتی که $(x,y)\to(۱,۰)$ را بررسی کنید.

سوال ۱۳ . در صورتی که حد تابع وجود دارد آن را به دست آورید و درغیر این صورت دلیل خود را برای عدم وجود حد ذکر کنید.

الف)

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(۱,۱)} \frac{cos(x)-cos(y^۳)}{sin(x)-sin(y^۳)}$$

ب)

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(۱,۱)} \frac{x^۳-y}{y^۳-x}$$

سوال ۱۴ . آیا می‌توان تابع زیر را در نقطه $(۰,۰)$ به‌قسمی تعریف نمود که تابع حاصل در این نقطه پیوسته شود؟

$$f(x,y)=\frac{(\sin x)(\sin^۳ y)}{۱-\cos(x^۲+y^۲)}.$$

در صورت ممکن بودن این امر مقدار تابع در $(۰,۰)$ را بیابید.

سوال ۱۵ . الف) U_1, U_2, U_3 سه بردار در R^3 می باشند که حجم متواضی السطوح تولید شده توسط سه بردارمذکور ناصفر است.نشان دهید ماتریس $A_{3\times 3}$ که درایه (i,j) آن برابر با $< U_i | U_j >$ می باشد ، مثبت معین است.($< | >$ علامت ضرب داخلی است.)

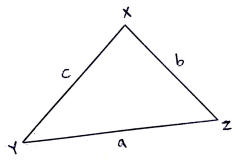
ب) فرض A یک ماتریس 3×3 پادمتقارن باشد.نشان دهید بردار a در R^3 یافت می شود که $AX = a \times X$ و بالعکس.(که در آن $X = (x, y, z)$) . اگر b بردار متناظر ماتریس پادمتقارن B باشد، $a \times b$ متناظر با چه ماتریسی بر حسب A و B می باشد؟

تذکر :

ماتریس A را مثبت معین گویند، هرگاه به ازای هر $x \neq 0$ عبارت $x^\top Ax$ اکیدا بزرگتر از صفر باشد.

ماتریس A را پادمتقارن گویند، هرگاه به ازای هر i, j داشته باشیم $A(i,j) = -A(j,i)$

ج) در R^2 مثلث زیر را در نظر بگیرید.



نشان دهید مکان برخورد نیمسازهای مثلث برابر با عبارت زیر است.

$$\frac{aX + bY + cZ}{a + b + c}$$