

با یاد او

سری نهم تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک (ادامه مبحث انتگرال)

مسئله ۱. تمرینات ۱ تا ۴ مسائل بخش ششم فصل ۶ کتاب آدامز: تقریب‌های T_4, M_4, T_8, M_8 و T_{16} را برای انتگرال‌های داده شده زیر، محاسبه کنید. همچنین، مقدار دقیق انتگرال‌ها را نیز محاسبه کنید و مقدار دقیق خطا را نیز بیابید. حال با یافتن یک کران بالا برای خطای تقریب‌ها، به کمک قضیه‌های کتاب آدامز، آنها را با خطاهای دقیق، مقایسه و نتیجه‌گیری کنید. (توجه: M_n و T_n به ترتیب، تقریب میانی و تقریب ذوزنقه، با افراز بازه انتگرال‌گیری به n قسمت مساوی، می‌باشد.)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 (1+x^2) dx & \text{آ} \\ I &= \int_0^{\pi/2} \sin x dx & \text{ج} \\ I &= \int_0^1 e^{-x} dx & \text{ب} \\ I &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} & \text{د} \end{aligned}$$

مسئله ۲. تمرین ۹ مسائل بخش ششم فصل ۶ کتاب آدامز: تقریب‌های T_4, M_4, T_8, M_8 و T_{16} را برای انتگرال $\int_0^6 f(x) dx$ ، که در آن تابع f مقادیری به صورت زیر دارد، محاسبه کنید.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	1.4142	0.1	1.4124
0.2	1.4071	0.3	1.3983
0.4	1.3860	0.5	1.3702
0.6	1.3510	0.7	1.3285
0.8	1.3026	0.9	1.2734
1.0	1.2411	1.1	1.2057
1.2	1.1772	1.3	1.1258
1.4	1.0817	1.5	1.0348
1.6	0.9853		

شکل ۱: مقادیر مورد نیاز برای تابع f

مسئله ۳. تمرین ۱۴ مسائل بخش ششم فصل ۶ کتاب آدامز: خطای تقریب روش تقریب نقطه میانی را برای محاسبه $\int_a^b f(x) dx$ ، بیان و ثابت کنید. همین کار را برای خطای تقریب روش ذوزنقه نیز انجام دهید. (اگر احساس نیاز می‌کنید، به راهنمایی سوال، در کتاب آدامز، مراجعه کنید).

مسئله ۴. تمرینات ۱ تا ۴ مسائل بخش هفتم فصل ۶ کتاب آدامز: تقریب‌های S_4 ، S_8 ، و S_{16} را برای انتگرال‌های داده شده زیر، محاسبه کنید. همچنین، مقدار دقیق انتگرال‌ها را نیز محاسبه کنید و مقدار دقیق خطا را نیز بیابید. حال با یافتن یک کران بالا برای خطای تقریب‌ها، به کمک قضیه‌های کتاب آدامز، آنها را با خطاهای دقیق، مقایسه و نتیجه‌گیری کنید. (توجه: S_n تقریب سیمپسون، با افزایش بازه انتگرال‌گیری به n قسمت مساوی، است).

$$\begin{aligned} \text{آ)} \quad I &= \int_0^2 (1+x^2) dx & \text{ج)} \quad I &= \int_0^{\pi/2} \sin x dx \\ \text{ب)} \quad I &= \int_0^1 e^{-x} dx & \text{د)} \quad I &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \end{aligned}$$

مسئله ۵. تمرین ۹ مسائل بخش هفتم فصل ۶ کتاب آدامز: تقریب‌های S_4 ، S_8 ، و S_{16} را برای انتگرال $\int_0^6 f(x) dx$ ، که در آن تابع f مقادیری به صورت شکل ۱ دارد، محاسبه کنید.

مسئله ۶. مشابه تمرین ۱۲ مسائل بخش هفتم فصل ۶ کتاب آدامز: از آن جایی که روش تقریب سیمپسون، بر مبنای تقریب تابع f به کمک چند جمله‌ای‌های درجه ۲ ای مانند $A + Bx + Cx^2$ ، انجام می‌شود؛ جای تعجب کمی دارد که این روش برای توابع $f(x)$ ، که چند جمله‌ای درجه دو هستند، مقدار دقیق انتگرال را ارائه بدهد. اما، در کمال تعجب، این روش، برای چند جمله‌ای‌های درجه ۳ نیز مقدار دقیق انتگرال را ارائه می‌دهد. دلیل چیست؟ (راهنمایی: خطای تقریب سیمپسون را بررسی کنید، و از آن استفاده کنید).

مسئله ۷. تمرینات ۱ تا ۴ مسائل بخش اول فصل ۷ کتاب آدامز: حجم هر کدام از موارد زیر را با روش برش دادن و یا با روش قاچ‌های استوانه‌ای، پیدا کنید.

آ) حجم حاصل از دوران ناحیه کران‌دار محدود به $y = x^2$ ، $y = 0$ ، و $x = 1$ ، حول محور x ‌ها.

ب) حجم حاصل از دوران ناحیه کران‌دار محدود به $y = x^2$ ، $y = 0$ ، و $x = 1$ ، حول محور y ‌ها.

ج) حجم حاصل از دوران ناحیه کران‌دار محدود به $y = x^2$ ، $y = \sqrt{x}$ ، و بین $x = 0$ تا $x = 1$ ، حول محور x ها.

د) حجم حاصل از دوران ناحیه کران‌دار محدود به $y = x^2$ ، $y = \sqrt{x}$ ، و بین $x = 0$ تا $x = 1$ ، حول محور y ها.

مسئله ۸. تمرین ۳ مسائل بخش دوم فصل ۷ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه حجم جسمی با ارتفاع ۱ که سطح مقطع‌های آن در ارتفاع z ، بیضی‌هایی با قطرهای $2z$ و $2\sqrt{1-z^2}$ باشند.

مسئله ۹. تمرین ۳ مسائل بخش سوم فصل ۷ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه طول نمودار تابع $y = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$ از $x = 0$ تا $x = 8$.

مسئله ۱۰. تمرین ۱۲ مسائل بخش سوم فصل ۷ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه طول نمودار تابع $y = \ln(1-x^2)$ از $x = -\frac{1}{3}$ تا $x = \frac{1}{3}$.

مسئله ۱۱. تمرین ۱۳ مسائل بخش سوم فصل ۷ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه طول نمودار تابع $y = \ln \sin x$ از $x = \frac{\pi}{6}$ تا $x = \frac{\pi}{4}$.

مسئله ۱۲. تمرین ۱۸ مسائل بخش سوم فصل ۷ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مقدار تقریبی طول نمودار تابع $y = x^4$ از $x = 0$ تا $x = 1$.

مسئله ۱۳. تمرین ۱۹ مسائل بخش سوم فصل ۷ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مقدار تقریبی طول نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ از $x = 1$ تا $x = 2$.

مسئله ۱۴. تمرین ۲۰ مسائل بخش سوم فصل ۷ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مقدار تقریبی محیط بیضی $3x^2 + y^2 = 3$.

مسئله ۱۵. تمرینات ۲۲ تا ۲۹ مسائل بخش سوم فصل ۷ کتاب آدامز: مساحت حاصل از دوران منحنی‌های داده شده زیر را، حول محورهای مشخص شده، محاسبه کنید.

آ) منحنی $y = x^2$ ، $0 \leq x \leq 2$ ، حول محور y ها.

ب) منحنی $y = x^3$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، حول محور x ها.

ج) منحنی $y = x^{3/2}$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، حول محور x ها.

د) منحنی $y = x^{3/2}$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، حول محور y ها.

ه) منحنی $y = e^x$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، حول محور x ها.

و) منحنی $y = \sin x$ ، $0 \leq x \leq \pi$ ، حول محور x ها.

ز) منحنی $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ ، $1 \leq x \leq 4$ ، حول محور x ها.

ح) منحنی $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ ، $1 \leq x \leq 4$ ، حول محور y ها.

مسئله ۱۶. تمرین ۳۲ مسائل بخش سوم فصل ۷ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت رویه حاصل از دوران

$$\text{بیضی } x^2 + 4y^2 = 4 \text{ حول محور } x \text{ها.}$$

مسئله ۱۷. تمرین ۳۲ مسائل بخش سوم فصل ۷ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت رویه حاصل از دوران

$$\text{بیضی } x^2 + 4y^2 = 4 \text{ حول محور } y \text{ها.}$$

مسئله ۱۸. تمرین ۳۸ مسائل بخش سوم فصل ۷ کتاب آدامز: منحنی $y = \ln x$ ، $0 < x \leq 1$ ، حول محور y ها، دوران

داده می شود. مساحت رویه شیپور-شکل حاصل از این دوران را بیابید.

مسئله ۱۹. تمرینات ۱، ۵، ۱۱، ۱۳ و ۱۵ مسائل بخش چهارم فصل ۷ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، جرم و

همچنین مرکز جرم را محاسبه کنید. به تقارن اجسام نیز توجه کنید.

آ) یک سیم مستقیم با طول L سانتیمتر و با چگالی (خطی) به صورت $\delta(s) = \sin\left(\frac{\pi s}{L}\right)$ گرم بر

سانتیمتر، در فاصله s سانتیمتر از یک سر سیم.

ب) یک صفحه که ناحیه $0 \leq y \leq 4 - x^2$ را اشغال می کند و با چگالی سطحی $\delta(x, y) = ky$ گرم بر

سانتیمتر مربع.

ج) یک توپ کروی-شکل، به شعاع R متر، و با چگالی حجمی z کیلوگرم بر متر مکعب، در نقطه P ،

به طوری که z (به متر) فاصله نقطه P از صفحه ای است که به فاصله $2R$ متر از مرکز توپ قرار دارد.

د) جسمی که ناحیه یک-چهارم کره‌ای به شعاع a ، و به مرکز مبدأ را اشغال می‌کند، و دارای مقطع پایینی به صورت ناحیه $x^2 + y^2 \leq a^2$ و $x \geq 0$ ، در صفحه xy است، و همچنین چگالی حجمی آن در ارتفاع z ، بالای مقطع پایینی جسم، برابر $\rho \cdot z$ باشد.

ه) صفحه نیم‌دایره‌ای که ناحیه $x^2 + y^2 \leq a^2$ و $y \geq 0$ را اشغال می‌کند، و دارای چگالی ks ، گرم بر سانتیمتر مربع، در فاصله s از مرکز نیم‌دایره است.

مسئله ۲۰. تمرینات ۱ تا ۶ و ۱۰ تا ۲۱ مسائل بخش پنجم فصل ۷ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، مرکز ثقل را محاسبه کنید. به تقارن اجسام نیز توجه کنید. همچنین اگر امکان استفاده از قضیه پاپوس وجود دارد، از آن نیز می‌توانید استفاده کنید.

آ) یک-چهارم دیسک $x^2 + y^2 \leq r^2$ و $x \geq 0$ و $y \geq 0$.

ب) ناحیه $x^2 - 9 \leq y \leq 0$.

ج) ناحیه $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

د) یک قطاع دایره‌ای از دیسک $x^2 + y^2 \leq r^2$ و $0 \leq y \leq x$.

ه) قسمتی از دیسک دایره‌ای-شکل که ناحیه $1 - \sqrt{4-x^2} \leq y \leq 0$ را اشغال می‌کند.

و) دیسک نیم‌بیضی-شکل که ناحیه $0 \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ را اشغال می‌کند.

ز) رویه سطح نیم‌کره‌ای با شعاع r .

ح) جسمی به صورت نیم‌گویی به شعاع r .

ط) یک جسم مخروطی شکل با شعاع قاعده r و ارتفاع h .

ی) رویه سطح مخروطی شکل با شعاع قاعده r و ارتفاع h .

ک) صفحه‌ای که ناحیه $0 \leq y \leq \sin x$ و $0 \leq x \leq \pi$ را اشغال می‌کند.

ل) صفحه‌ای که ناحیه $0 \leq y \leq \cos x$ و $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ را اشغال می‌کند.

م) کمانی به صورت یک-چهارم دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 = r^2$ و $x \geq 0$ و $y \geq 0$.

ن) جسم حاصل از دوران مورد (آ) شکل ۲ حول محور y ها.

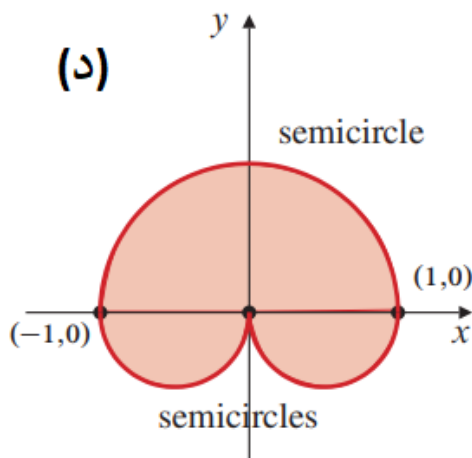
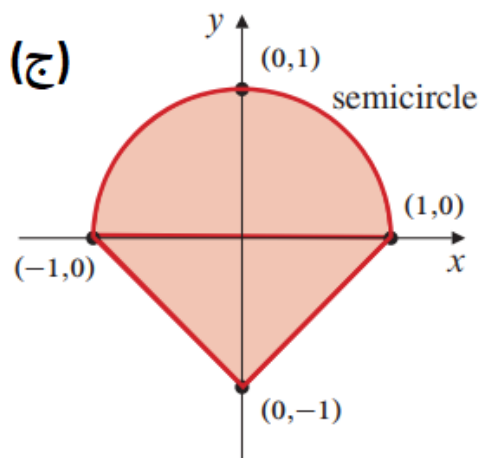
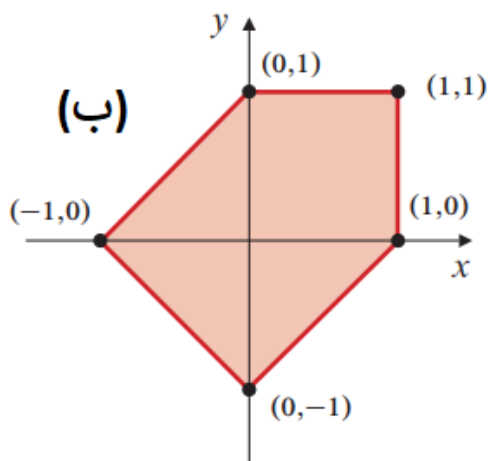
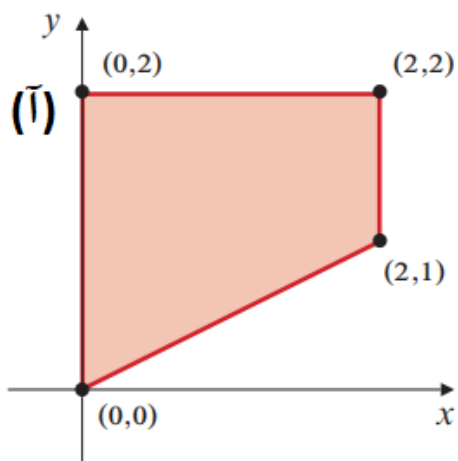
س) ناحیه مورد (آ) شکل ۲.

ع) ناحیه مورد (ب) شکل ۲.

ف) ناحیه مورد (ج) شکل ۲.

ص) ناحیه مورد (د) شکل ۲.

ق) جسم حاصل از دوران ناحیه $y = 2x - x^2$ ، $0 \leq y \leq 2$ حول خط $y = -2$.



شکل ۲