با یاد او

سری هفتم <u>تمرین‌های پیشنهادی</u> ریاضی عمومی یک (مبحث انتگرال)

مسئله ۱. <u>تمرینات ۱۵ و ۱۶ مسائل بخش اوّل فصل ۵ کتاب آدامز:</u> مجموع‌های داده شده زیر را به‌صورت $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ نمایش دهید.

آ) $\sum_{j=0}^{99} \sin j$.

ب) $\sum_{k=-5}^{m} \frac{1}{k^2+1}$.

مسئله ۲. <u>تمرینات ۱۹ تا ۲۲ و ۲۴ تا ۲۸ مسائل بخش اوّل فصل ۵ کتاب آدامز:</u> مقدار دقیق مجموع‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\sum_{k=1}^{n} \left(\pi^k - 3\right)$.

ب) $\sum_{i=1}^{n} \left(2^i - i^2\right)$.

ج) $\sum_{m=1}^{n} \ln m$.

د) $\sum_{i=0}^{n} e^{\frac{i}{n}}$.

ه) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$.

و) $1 - x + x^2 - x^3 - \cdots + x^{2n}$.

ز) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + 100x^{99}$.

ح) $2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \cdots - 99^2$.

ط) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{n}{2^n}$.

مسئله ۳. <u>تمرین ۲۹ مسائل بخش اوّل فصل ۵ کتاب آدامز:</u> مطلوبست تحقیق درستی فرمول زیر که به «قانون تلسکوپی یا ادغام» معروف است.

$$\sum_{i=m}^{n} \big(f(i+1) - f(i)\big) = f(n+1) - f(m).$$

مسئله ۴. <u>تمرین ۳۳ مسائل بخش اوّل فصل ۵ کتاب آدامز:</u> ابتدا نشان دهید

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1},$$

و سپس مقدار مجموع

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)},$$

را محاسبه کنید.

مسئله ۵. <u>مشابه تمرین ۳۵ مسائل بخش اوّل فصل ۵ کتاب آدامز:</u> به‌کمک قانون تلسکوپی، و اتحاد زیر

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k+1,$$

نشان دهید

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

مسئله ۶. فرض کنید می‌دانیم

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

حال به‌کمک قانون تلسکوپی، و اتحاد زیر

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1,$$

نشان دهید

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

مسئله ۷. <u>مشابه تمرین ۴۲ مسائل بخش اوّل فصل ۵ کتاب آدامز:</u> فرض کنید می‌دانیم

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

حال به‌کمک قانون تلسکوپی، و اتحاد زیر

$$(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1,$$

نشان دهید

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

مسئله ۸. تمرین ۱۴ مسائل بخش دوم فصل ۵ کتاب آدامز: به‌کمک اتحاد $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$، مساحت زیر نمودار $y = x^3$، و بالای محور xها را بین دو خط قائم $x = 0$ و $x = b > 0$، محاسبه کنید.

مسئله ۹. تمرینات ۱۶ تا ۱۹ مسائل بخش دوم فصل ۵ کتاب آدامز: مجموع S_nهای داده شده در زیر را به عنوان مجموع مساحت مستطیل‌های تقریب زنندهٔ مساحت یک ناحیهٔ خاص از صفحهٔ دو بعدی تفسیر کنید، و مقدار $\lim_{n\to+\infty} S_n$ را به‌دست آورید.

آ) $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right)$.

ب) $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(1 - \frac{2i}{n}\right)$.

ج) $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n + 3i}{n^2}$.

د) $S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2}$.

مسئله ۱۰. تمرینات ۱ تا ۶ مسائل بخش سوم فصل ۵ کتاب آدامز: فرض کنید P_n نشان دهندهٔ افراز بازهٔ $[a,b]$ به n زیربازه با طول برابر با $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ باشد. مجموع پایینی $L(f,P_n)$ و مجموع بالایی $U(f,P_n)$ را برای هر کدام از توابع داده شده، و با n داده شده محاسبه کنید.

آ) $f(x) = x$ روی بازهٔ $[0,2]$، با $n = 8$.

ب) $f(x) = x^2$ روی بازهٔ $[0,4]$، با $n = 4$.

ج) $f(x) = e^x$ روی بازهٔ $[-2,2]$، با $n = 4$.

د) $f(x) = \ln x$ روی بازهٔ $[1,2]$، با $n = 5$.

ه) $f(x) = \sin x$ روی بازهٔ $[0,\pi]$، با $n = 6$.

و) $f(x) = \cos x$ روی بازهٔ $[0,2\pi]$، با $n = 4$.

مسئله ۱۱. تمرینات ۷ تا ۱۰ مسائل بخش سوم فصل ۵ کتاب آدامز: فرض کنید P_n نشان دهندهٔ افراز بازهٔ $[a,b]$ به n زیربازه با طول برابر با $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ باشد. مجموع پایینی $L(f,P_n)$ و مجموع بالایی $U(f,P_n)$ را برای هر کدام از توابع داده شده، و روی بازه‌های داده شده، محاسبه کنید. سپس نشان دهید

$$\lim_{n\to+\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to+\infty} U(f,P_n),$$

و از آن نتیجه بگیرید که توابع داده شده روی بازهٔ $[a,b]$ (ریمان) انتگرال‌پذیر هستند. همچنین مقدار $\int_a^b f(x)\,dx$ را نیز مشخص کنید.

آ) $f(x) = x$ روی بازهٔ $[a,b] = [۰,۱]$.

ب) $f(x) = ۱ - x$ روی بازهٔ $[a,b] = [۰,۲]$.

ج) $f(x) = x^۳$ روی بازهٔ $[a,b] = [۰,۱]$.

د) $f(x) = e^x$ روی بازهٔ $[a,b] = [۰,۳]$.

مسئله ۱۲. تمرینات ۱۱ تا ۱۶ مسائل بخش سوم فصل ۵ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، مقدار حد داده شده را به‌صورت یک انتگرال بیان کنید.

آ) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=۱}^{n} \frac{۱}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$.

ب) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=۱}^{n} \frac{۱}{n}\sqrt{\frac{i-۱}{n}}$.

ج) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=۱}^{n} \frac{\pi}{n}\sin\left(\frac{\pi i}{n}\right)$.

د) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=۱}^{n} \frac{۲}{n}\ln\left(۱+\frac{۲i}{n}\right)$.

ه) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=۱}^{n} \frac{۱}{n}\tan^{-۱}\left(\frac{۲i-۱}{۲n}\right)$.

و) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=۱}^{n} \frac{n}{n^۲+i^۲}$.

مسئله ۱۳. نشان دهید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (ریمان) انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر $\epsilon > ۰$، افراز P برای $[a,b]$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$

مسئله ۱۴. تمرینات ۱۷ مسائل بخش سوم فصل ۵ کتاب آدامز: نشان دهید که اگر f روی بازهٔ $[a,b]$ تابعی پیوسته و نانزولی و همچنین P_n نشان دهندهٔ افراز بازهٔ $[a,b]$ به n زیربازه با طول برابر باشد، آن‌گاه

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{n}.$$

سپس نتیجه بگیرید که f روی $[a,b]$ (ریمان) انتگرال‌پذیر است.

مسئله ۱۵. تمرینات ۳ تا ۱۶ مسائل بخش چهارم فصل ۵ کتاب آدامز: به‌کمک خواص انتگرال معین و تعبیر انتگرال‌ها به‌صورت مساحت، هر کدام از موارد داده شدهٔ زیر را محاسبه کنید.

آ) $\int_{-۲}^{۲}(x+۲)\,dx$.

ب) $\int_{۰}^{۲}(۳x+۱)\,dx$.

ج) $\int_a^b x\,dx$.

د) $\int_{-۱}^{۲} (۱-۲x)\,dx$.

ه) $\int_{-\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲}} \sqrt{۲-t^۲}\,dt$.

و) $\int_{-\sqrt{۲}}^{۰} \sqrt{۲-x^۲}\,dx$.

ز) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(x^۳\right)\,dx$.

ح) $\int_{-a}^{a} (a-|s|)\,ds$.

ط) $\int_{-۱}^{۱} \left(u^۵-۳u^۳+\pi\right)\,du$.

ی) $\int_{۰}^{۲} \sqrt{۲x-x^۲}\,dx$.

ک) $\int_{-۴}^{۴} (e^x-e^{-x})\,dx$.

ل) $\int_{-۳}^{۳} (۲+t)\sqrt{۹-t^۲}\,dt$.

م) $\int_{۰}^{۱} \sqrt{۴-x^۲}\,dx$.

ن) $\int_{۱}^{۲} \sqrt{۴-x^۲}\,dx$.

مسئله ۱۶. تمرینات ۱۷ تا ۲۲ مسائل بخش چهارم فصل ۵ کتاب آدامز: با قبول این‌که $\int_{۰}^{a} x^۲\,dx = \frac{a^۳}{۳}$، هر کدام از موارد داده شدهٔ زیر را محاسبه کنید.

آ) $\int_{۰}^{۲} ۶x^۲\,dx$.

ب) $\int_{۲}^{۳} \left(x^۲-۴\right)\,dx$.

ج) $\int_{-۲}^{۲} \left(۴-t^۲\right)\,dt$.

د) $\int_{۰}^{۲} \left(v^۲-v\right)\,dv$.

ه) $\int_{۰}^{۱} \left(x^۲+\sqrt{۱-x^۲}\right)\,dx$.

و) $\int_{-۶}^{۶} x^۲(۲+\sin x)\,dx$.

مسئله ۱۷. تمرین ۳۶ مسائل بخش چهارم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{۰}^{۳} |۲-x|\,dx.$$

مسئله ۱۸. تمرین ۳۷ مسائل بخش چهارم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{۰}^{۲} \sqrt{۴-x^۲}\,\mathrm{sgn}(x-۱)\,dx.$$

مسئله ۱۹. تمرینات ۳۹ و ۴۰ مسائل بخش چهارم فصل ۵ کتاب آدامز: به‌کمک رسم نمودار توابع زیر انتگرال، مقدار انتگرال هر کدام از موارد داده شدهٔ زیر را محاسبه کنید.

آ) $\int_{-۳}^{۴}\left(|x+۱|-|x-۱|+|x+۲|\right)dx$.   ب) $\int_{۰}^{۳}\frac{x^{۲}-x}{|x-۱|}\,dx$.

مسئله ۲۰. تمرینات ۴۲ و ۴۳ مسائل بخش چهارم فصل ۵ کتاب آدامز: منظور از $\overline{f}$ برای یک تابع (ریمان) انتگرال‌پذیر روی بازهٔ $[a,b]$ یعنی مقدار میانگین آن روی بازهٔ $[a,b]$؛ یا به‌عبارتی

$$\overline{f}=\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

فرض کنید $a<b$ و f روی $[a,b]$ پیوسته باشد.

آ) نشان دهید

$$\int_a^b\left(f(x)-\overline{f}\right)dx=۰.$$

ب) ثابت k را طوری بیابید که مقدار انتگرال زیر مینیمم گردد.

$$\int_a^b\left(f(x)-k\right)^{۲}dx.$$

مسئله ۲۱. تمرینات ۱ تا ۲۰ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز: مقدار انتگرال‌های معین زیر را حساب کنید.

آ) $\int_{۰}^{۲}x^{۳}\,dx$.

ب) $\int_{۰}^{۴}\sqrt{x}dx$.

ج) $\int_{۱/۲}^{۱}\frac{۱}{x^{۲}}\,dx$.

د) $\int_{-۲}^{-۱}\left(\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{x^{۳}}\right)dx$.

ه) $\int_{-۱}^{۲}\left(۳x^{۲}-۴x+۲\right)dx$.

و) $\int_{۱}^{۲}\left(\frac{۲}{x^{۳}}-\frac{x^{۳}}{۲}\right)dx$.

ز) $\int_{-۲}^{۲}\left(x^{۲}+۳\right)^{۲}dx$.

ح) $\int_{۴}^{۹}\left(\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)dx$.

ط) $\int_{-\pi/۴}^{-\pi/۶}\cos x\,dx$.

ی) $\int_{۰}^{\pi/۳}\sec^{۲}\theta\,d\theta$.

ک) $\int_{\pi/۴}^{\pi/۳}\sin\theta\,d\theta$.

ل) $\int_{۰}^{۲\pi}(۱+\sin u)\,du$.

م) $\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}\,dx$.

ن) $\int_{-۲}^{۲}(e^{x}-e^{-x})\,dx$.

س) $(a>۰)$ $\int_۰^e a^x\,dx$.

ص) $\int_۰^{۱/۲} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$.

ع) $\int_{-۱}^{۱} ۲^x\,dx$.

ق) $\int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۴-x^۲}}$.

ف) $\int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{۱+x^۲}$.

ر) $\int_{-۲}^{۰} \frac{dx}{۴+x^۲}$.

مسئله ۲۲. تمرین ۲۵ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ مساحت محصور بین نمودارهای $y=x^۲-۳x+۳$ و $y=۱$.

مسئله ۲۳. تمرین ۲۸ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ مساحت قسمت بالایی نمودار $y=|x|$ و پایین نمودار $y=۱۲-x^۲$.

مسئله ۲۴. تمرینات ۳۳ و ۳۴ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال توابع (قطعه‌قطعه پیوسته) زیر.

آ) $\int_۰^{\frac{۳\pi}{۲}} |\cos x|\,dx$.

ب) $\int_۱^۳ \frac{\operatorname{sgn}(x-۲)}{x^۲}\,dx$.

مسئله ۲۵. تمرینات ۳۹ تا ۴۶ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ مشتق‌های داده شد زیر.

آ) $\frac{d}{dx}\int_۲^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

ه) $\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{۱+y^۲}\,dy$.

ب) $\frac{d}{dt}\int_t^۳ \frac{\sin x}{x}\,dx$.

و) $\frac{d}{d\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{۱}{۱-x^۲}\,dx$.

ج) $\frac{d}{dx}\int_{x^۲}^{۰} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

ز) $\frac{d}{dx}F(\sqrt{x})$، اگر $F(t)=\int_۰^t \cos\left(x^۲\right)\,dx$.

د) $\frac{d}{dx}x^۲\int_۰^{x^۲} \frac{\sin u}{u}\,du$.

ح) $H'(۲)$، اگر $H(x)=۳x\int_۴^{x^۲} e^{-\sqrt{t}}\,dt$.

مسئله ۲۶. تمرینات ۴۷ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست حل معادلهٔ انتگرالی زیر؛ یعنی یافتن

توابع fی که در رابطهٔ زیر صدق کنند.

$$f(x)=\pi\left(۱+\int_{۱}^{x} f(t)\,dt\right).$$

مسئله ۲۷. <u>تمرینات ۴۸ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز</u>: مطلوبست حل معادلهٔ انتگرالی زیر.

$$f(x)=۱-\int_{۰}^{x} f(t)\,dt.$$

مسئله ۲۸. <u>تمرینات ۵۱ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز</u>: آیا تابع زیر ماکسیمم و مینیمم دارد؟ آنها را بیابید.

$$F(x)=\int_{۰}^{۲x-x^{۲}} \cos\left(\frac{۱}{۱+t^{۲}}\right)dt.$$

مسئله ۲۹. <u>تمرینات ۵۲ تا ۵۴ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز</u>: مطلوبست محاسبه حدهای زیر.

آ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{۵}+\left(۱+\frac{۲}{n}\right)^{۵}+\cdots+\left(۱+\frac{n}{n}\right)^{۵}\right)$.

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{۲\pi}{n}+\sin\frac{۳\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$.

ج) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^{۲}+۱}+\frac{n}{n^{۲}+۴}+\frac{n}{n^{۲}+۹}+\cdots+\frac{n}{۲n^{۲}}\right)$.

مسئله ۳۰. نشان دهید اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (ریمان) انتگرال‌پذیر باشد، حتماً کراندار است.

مسئله ۳۱. فرض کنید $c\in(a,b)$ باشد. نشان دهید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & x\neq c \\ ۱ & x=c \end{cases}$$

(ریمان) انتگرال‌پذیر است و $\int_{a}^{b} f(x)\,dx=۰$.

مسئله ۳۲. نشان دهید اگر f روی $[a,b]$ (ریمان) انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه $f^{۲}$ نیز (ریمان) انتگرال‌پذیر است (آیا مثال نقضی برای عکس این مطلب وجود دارد؟). به‌کمک این مطلب و اتحاد $۴ab=(a+b)^{۲}-(a-b)^{۲}$، نشان دهید که ضرب دو تابع (ریمان) انتگرال‌پذیر، (ریمان) انتگرال‌پذیر است.

مسئله ۳۳. فرض کنید برای هر $x \in \mathbb{Q}$، $f(x) \geq ۱$ باشد. نشان دهید اگر f روی بازهٔ $[۰,۱]$ (ریمان) انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\int_{۰}^{۱} f(x)\,dx \geq ۱.$$

مسئله ۳۴. فرض کنید f و g روی $[۰,۱]$ پیوسته، و $\int_{۰}^{۱} f\,dx = \int_{۰}^{۱} g\,dx$ باشد. نشان دهید عدد $c \in [۰,۱]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(c) = g(c)$.

مسئله ۳۵. فرض کنید تابع f روی $[a,b]$ (ریمان) انتگرال‌پذیر و $f \geq ۰$ باشد. اگر $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = ۰$، نشان دهید f در هر نقطهٔ پیوستگی خود مقدار صفر دارد.

مسئله ۳۶. فرض کنید $f : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ پیوسته و $\int_{۰}^{۱} fg\,dx = ۰$ برای هر g پیوسته برقرار باشد. نشان دهید $f \equiv ۰$.

مسئله ۳۷. نشان دهید

$$\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲n} \to \ln ۲, \qquad n \to \infty.$$

مسئله ۳۸. نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{۱}{e}.$$

مسئله ۳۹. فرض کنید $f : [۰,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته، اکیداً صعودی و $f(۰) = ۰$ باشد. ثابت کنید که به‌ازای هر $۰ < t < f(b)$، داریم

$$\int_{۰}^{b} f(x)\,dx + \int_{۰}^{t} f^{-۱}(y)\,dy > bt.$$

مسئله ۴۰. فرض کنید I یک بازه و $f, F : I \to \mathbb{R}$ مفروض باشند. گوییم F یک تابع اولیهٔ f است در صورتی که F بر I مشتق‌پذیر باشد و $F'(x) = f(x)$ برای هر $x \in I$. نشان دهید تابع اولیه در صورت وجود در حد جمع با اعداد ثابت یکتاست.

مسئله ۴۱. نشان دهید شرط لازم برای این‌که تابعی، تابع اولیه داشته باشد آن است که تابع مذکور دارای خاصیت مقدار میانی باشد؛ یعنی وقتی دو مقداری را اخذ می‌کند، آن‌گاه هر مقدار بین آن دو را نیز بتواند اخذ کند.

مسئله ۴۲. نشان دهید

$$f_1(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\[2ex] 0 & x=0\end{cases}$$

تابع اولیه دارد ولی

$$f_2(x)=\begin{cases}\sin^2\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\[2ex] 0 & x=0\end{cases}$$

با وجود آن‌که دارای خاصیت مقدار میانی است، تابع اولیه ندارد.

مسئله ۴۳. نشان دهید کلّی‌ترین تابع اولیه برای $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ به‌صورت زیر است

$$F(x)=\begin{cases}\ln x+C_1 & x>0\\[2ex] \ln(-x)+C_2 & x<0.\end{cases}$$

مسئله ۴۴. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته، نامنفی و $A\geq 0$ باشد. نشان دهید اگر برای هر x در بازهٔ $[a,b]$ داشته باشیم

$$f(x)\leq A\int_a^x f(t)\,dt,$$

آن‌گاه $f\equiv 0$.

مسئله ۴۵. فرض کنید $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دو تابع پیوسته و m و M به‌ترتیب inf و sup تابع f روی $[a,b]$ باشند و علامت g بر $[a,b]$ تغییر نکند. در این‌صورت $c\in[m,M]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=c\int_a^b g(x)\,dx.$$

در اصل $c=f(x_0)$، برای یک $x_0\in[a,b]$ مناسب می‌باشد.

مسئله ۴۶. به‌کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای و قضیهٔ اساسی حسابان، نشان دهید که اگر u و v مشتق‌پذیر و f پیوسته باشد، آن‌گاه

$$h(x)=\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt$$

مشتق‌پذیر است و

$$h'(x)=u'(x)f(u(x))-v'(x)f(v(x)).$$

مسئله ۴۷. دو تابع f و g روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر، و با مشتق پیوسته هستند. نشان دهید

$$\int_a^b fg'\,dx+\int_a^b f'g\,dx=f(b)g(b)-g(a)g(a).$$

مسئله ۴۸. مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{۱}{n}\cdot\left[\ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right)+\cdots+\ln\left(۱+\frac{n}{n}\right)\right].$$

مسئله ۴۹. نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(۱^۱\times ۲^۲\times ۳^۳\times\cdots\times n^n\right)^{\frac{۱}{n^۲}}}{n^{\frac{n+۱}{۲n}}}=\frac{۱}{\sqrt[۴]{e}}.$$

مسئله ۵۰. فرض کنید f روی $[۰,۱]$ پیوسته باشد. مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_۰^۱ x^n f(x)\,dx}{\displaystyle\int_۰^۱ x^n\,dx}.$$

مسئله ۵۱. فرض کنید f روی $[۰,۱]$ پیوسته باشد. نشان دهید

$$\lim_{n\to+\infty}\int_۰^۱\frac{nf(x)}{۱+n^۲x^۲}\,dx=\frac{\pi}{۲}f(۰).$$

مسئله ۵۲. فرض کنید f روی $[۰,۱]$ پیوسته باشد. نشان دهید

$$\lim_{n\to+\infty}\int_۰^۱ nx^nf(x)\,dx=f(۱).$$

مسئله ۵۳. تابع f روی $[۰,\infty)$ پیوسته و $\lim_{x\to+\infty}\left\{f(x)+\int_۰^x f(t)\,dt\right\}$ موجود و متناهی است. نشان دهید $\lim_{x\to+\infty}f(x)=۰$.

مسئله ۵۴. نشان دهید اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد، آن‌گاه

$$\left(\int_{0}^{1}|f(x)|^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}\to\max_{0\le x\le 1}|f(x)|,\qquad n\to+\infty.$$

مسئله ۵۵. تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته است و $0<m\le f(x)\le M$. ثابت کنید

$$(b-a)^2\le\left(\int_a^b f\,dx\right)\left(\int_a^b\frac{1}{f}\,dx\right)\le\frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

مسئله ۵۶. نشان دهید اگر دنباله‌ای از افرازهای $\{P_n\}$ و $\{Q_n\}$ برای $[a,b]$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$U(f,P_n)-L(f,Q_n)\to 0,\qquad n\to\infty,$$

آن‌گاه f روی $[a,b]$ (ریمان) انتگرال‌پذیر است. (راهنمایی: یک سمت اثبات سوال تقریباً واضح است؛ یعنی وقتی‌که می‌دانیم f روی $[a,b]$ (ریمان) انتگرال‌پذیر است و می‌خواهیم سمت دیگر را نشان دهیم. برای سمت نابدیهی‌تر به‌صورت زیر عمل کنید. فرض کنید دنبالهٔ افرازهای P_n و Q_n داده شده است که $U(f,P_n)-L(f,Q_n)\to 0$. حال افراز $R_n=P_n\cup Q_n$، که در واقع افراز حاصل از کنار هم قرار دادن نقاط دو افراز P_n و Q_n است را در نظر بگیرید. توجه کنید که ممکن است بعضی از نقاط این دو افراز روی هم بیافتند، که در اشتراک عملاً یک نقطه محسوب خواهند شد و حتماً نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ $[a,b]$، یعنی a و b، در هر دو افراز وجود دارند. حال مشابه تمرین ۱۸ مسائل بخش سوم فصل ۵ کتاب آدامز می‌توان نتیجه گرفت

$$U(f,R_n)\le U(f,P_n),\qquad L(f,Q_n)\le L(f,R_n).$$

پس خواهیم داشت

$$U(f,R_n)-L(f,R_n)\le U(f,P_n)-L(f,Q_n).$$

حال چون سمت راست به صفر میل می‌کند، در نتیجه می‌توانید به راحتی (ریمان) انتگرال‌پذیری f روی $[a,b]$ را نتیجه بگیرید.)
