با یاد او

سری پنجم تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک (ادامه مبحث مشتق)

مسئله ۱. تمرینات ۷ تا ۱۶ مسائل بخش دوم فصل ۴ کتاب آدامز: مطلوبست حل موارد زیر به‌کمک روش نیوتن.

آ) مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ با حل $x^۲ - ۲ = ۰$.

ب) مقدار تقریبی $\sqrt{۳}$ با حل $x^۲ - ۳ = ۰$.

ج) مقدار تقریبی ریشه‌ای از $x^۳ + ۲x - ۱ = ۰$ که در بازهٔ $[۰, ۱]$ قرار دارد.

د) مقدار تقریبی ریشه‌ای از $x^۳ + ۲x^۲ - ۲ = ۰$ که در بازهٔ $[۰, ۱]$ قرار دارد.

ه) مقدار تقریبی دو تا از ریشه‌های $x^۴ - ۸x^۲ - x + ۱۶ = ۰$ که در بازهٔ $[۱, ۳]$ قرار دارند.

و) مقدار تقریبی سه تا از ریشه‌های $x^۳ + ۳x^۲ - ۱ = ۰$ که در بازهٔ $[-۳, ۱]$ قرار دارند.

ز) مقدار تقریبی ریشهٔ $\sin x = ۱ - x$. (راهنمایی: با رسم نمودار، می‌توانید $x_۰$ روش نیوتن را حدس بزنید.)

ح) مقدار تقریبی همهٔ ریشه‌های $\cos x = x^۲$.

ط) مقدار تقریبی ریشه‌ای از $\tan x = x$ که در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\right]$ قرار دارد. (تعداد ریشه‌های معادلهٔ $\tan x = x$ چقدر است؟)

ی) مقدار تقریبی ریشه‌های $\sqrt{x} = \frac{۱}{x^۲ + ۱}$ با بازنویسی آن به‌صورت $(x^۲ + ۱)\sqrt{x} - ۱ = ۰$.

مسئله ۲. طرح کلی یافتن نقاط اکسترمم (ماکسیمم و یا مینیمم) موضعی و مطلق یک تابع مشتق‌پذیر را روی بازه‌هایی مانند $[a, b]$، $[a, b)$، $(a, b]$ و (a, b)، بیان کنید.

مسئله ۳. تمرینات ۱ تا ۱۷ مسائل بخش چهارم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، مشخص کنید که آیا تابع داده شده، اکسترمم موضعی و مطلق دارد یا خیر؟ و در صورت وجود، آنها را بیابید.

آ) $f(x)=x+۲$ روی بازهٔ $[-۱,۱]$.

ب) $f(x)=x+۲$ روی بازهٔ $(-\infty,۰]$.

ج) $f(x)=x+۲$ روی بازهٔ $[-۱,۱)$.

د) $f(x)=x^{۲}+۱$ روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$.

ه) $f(x)=x^{۲}+۱$ روی بازهٔ $[-۲,۳]$.

و) $f(x)=x^{۲}+۱$ روی بازهٔ $(-۲,۳)$.

ز) $f(x)=x^{۳}+x-۴$ روی بازهٔ $[a,b]$.

ح) $f(x)=x^{۳}+x-۴$ روی بازهٔ (a,b).

ط) $f(x)=x^{۵}+x^{۳}+۲x$ روی بازهٔ $(a,b]$.

ی) $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ روی دامنهٔ خود.

ک) $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ روی بازهٔ $(۰,۱)$.

ل) $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ روی بازهٔ $[۲,۳]$.

م) $f(x)=|x-۱|$ روی بازهٔ $[-۲,۲]$.

ن) $|x^{۲}-x-۲|$ روی بازهٔ $[-۳,۳]$.

س) $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}+۱}$ روی دامنهٔ خود.

ع) $f(x)=(x+۲)^{\frac{۲}{۳}}$ روی دامنهٔ خود.

ف) $f(x)=(x-۲)^{\frac{۱}{۳}}$ روی دامنهٔ خود.

مسئله ۴. تمرینات ۱۸ تا ۳۱ و ۳۶ تا ۴۰ مسائل بخش چهارم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، برای تابع داده شده (روی دامنهٔ خود)، مکان اکسترمم‌های موضعی و نوع آنها را مشخص کنید. همچنین مشخص کنید کدام یک از اکسترمم‌های موضعی، مطلق نیز می‌باشند.

آ) $f(x)=x^{۲}+۲x$.

ب) $f(x)=x^{۳}-۳x-۲$.

ج) $f(x)=(x^{۲}-۴)^{۲}$.

د) $f(x)=x^{۳}(x-۱)^{۲}$.

ه) $f(x)=x^{۲}(x-۱)^{۲}$.

و) $f(x)=x(x^{۲}-۱)^{۲}$.

ز) $f(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}$.

ح) $f(x)=\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}$.

ط) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{۴}+۱}}$.

ی) $f(x)=x\sqrt{۲-x^{۲}}$.

ک) $f(x)=x+\sin x$.

ل) $f(x)=x-۲\sin x$.

م) $f(x)=x-2\tan^{-1}x$.

ن) $f(x)=2x-\sin^{-1}x$.

س) $f(x)=|x+1|$.

ع) $f(x)=|x^2-1|$.

ف) $f(x)=\sin|x|$.

ص) $f(x)=|\sin x|$.

ق) $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}-(x+1)^{\frac{2}{3}}$.

مسئله ۵. تمرینات ۴۱ تا ۴۶ مسائل بخش چهارم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، برای تابع داده شده، روی دامنهٔ خود یا بازهٔ داده شده، مشخص کنید آیا ماکسیمم مطلق و یا مینیمم مطلق، وجود دارد یا خیر؟ در صورت وجود، آنها را بیابید.

آ) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

ب) $\dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$.

ج) $x\sqrt{4-x^2}$.

د) $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$.

ه) $\dfrac{1}{x\sin x}$ روی بازهٔ $(0,\pi)$.

و) $\dfrac{\sin x}{x}$.

مسئله ۶. تمرین ۴۷ مسائل بخش چهارم فصل ۴ کتاب آدامز: اگر تابعی ماکسیمم مطلق داشته باشد، آیا حتماً ماکسیمم موضعی هم دارد؟ بلعکس چطور؟

مسئله ۷. تمرین ۴۹ مسائل بخش چهارم فصل ۴ کتاب آدامز: تابع با ضابطهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

نشان دهید f روی بازهٔ $[0,+\infty)$ پیوسته، و روی بازهٔ $(0,+\infty)$ مشتق‌پذیر است، اما نقطهٔ $x=0$ نه مینیمم موضعی و نه ماکسیمم موضعی است.

مسئله ۸. تمرینات ۱۸ و ۱۹ مسائل بخش دوم فصل ۴ کتاب آدامز: ماکسیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

آ) $\frac{\sin x}{۱+x^۲}$.

ب) $\frac{\cos x}{۱+x^۲}$.

مسئله ۹. تمرینات ۱، ۳، ۴، ۶، ۹، ۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۹، ۲۲، ۲۳، و ۲۷ مسائل بخش سوم فصل ۴ آدامز:

مطلوبست محاسبهٔ حدود زیر

آ) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۳x}{\tan ۴x}$.

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ax}{\sin bx}$.

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ax}{۱-\cos bx}$.

د) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{\frac{۱}{۳}}-۱}{x^{\frac{۲}{۳}}-۱}$.

ه) $\lim\limits_{t\to \pi}\frac{\sin^۲ t}{t-\pi}$.

و) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\cos ۳x}{\pi-۲x}$.

ز) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^۳}$.

ح) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}$.

ط) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۲-x^۲-\cos x}{x^۴}$.

ی) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{\sin^۲ x}{\tan x-x}$.

ک) $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\sin t}{t}$.

ل) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-}\left(\sec x-\tan x\right)$.

م) $\lim\limits_{t\to ۰}\frac{۳\sin t-\sin ۳t}{۳\tan t-\tan ۳t}$.

مسئله ۱۰. تمرینات ۱ تا ۱۵، ۲۱ و ۲۲ مسائل بخش پنجم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، بازه‌هایی که توابع داده شده روی آنها، محدب و یا مقعر هستند را مشخص، و همچنین مکان نقاط عطف را نیز تعیین کنید.

آ) $f(x)=\sqrt{x}$.

ب) $f(x)=۲x-x^۲$.

ج) $f(x)=x^۲+۲x+۳$.

د) $f(x)=x-x^۳$.

ه) $f(x)=x^2+1$ روی بازهٔ $[-2,3]$.

ل) $f(x)=\sin x$.

و) $f(x)=10x^3-3x^5$.

م) $f(x)=\cos 3x$.

ز) $f(x)=10x^3+3x^5$.

ن) $f(x)=x+\sin 2x$.

ح) $f(x)=(3-x^2)^2$.

س) $f(x)=x-2\sin x$.

ط) $f(x)=(2+2x-x^2)^2$.

ع) $f(x)=\tan^{-1}x$.

ی) $f(x)=(x^2-4)^3$.

ف) $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2+12x-\frac{25}{3}$.

ک) $f(x)=\frac{x}{x^2+3}$.

ص) $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

مسئله ۱۱. تمرین ۲۳ مسائل بخش پنجم فصل ۴ کتاب آدامز: در مورد تحدب و تقعر تابع خطی $f(x)=ax+b$، بحث کنید. آیا نقطهٔ عطفی برای آن وجود دارد؟

مسئله ۱۲. تمرینات ۲۴ تا ۲۷، ۲۹، ۳۲ و ۳۳ مسائل بخش پنجم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، در صورت امکان، به‌کمک آزمون مشتق مرتبهٔ دوم، نوع نقاط بحرانی را تعیین کنید.

آ) $f(x)=3x^3-36x-3$.

ه) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

ب) $f(x)=x(x-2)^2+1$.

و) $f(x)=(x^2-4)^2$.

ج) $f(x)=x+\frac{4}{x}$.

ز) $f(x)=(x^2-4)^3$.

د) $f(x)=x^3+\frac{1}{x}$.

مسئله ۱۳. تمرین ۳۶ مسائل بخش پنجم فصل ۴ کتاب آدامز: تابع با ضابطهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x < ۰. \end{cases}$$

آ) آیا $x = ۰$ یک نقطهٔ بحرانی برای f است؟

ب) آیا $x = ۰$ یک نقطهٔ عطف برای f است؟

ج) آیا $f''(۰) = ۰$ است؟

حال به این سوال پاسخ دهید که اگر در نقطهٔ عطف یک تابع، خط مماس غیرقائم موجود باشد، آیا حتماً مشتق دوم برای آن تابع و در آن نقطه صفر است؟

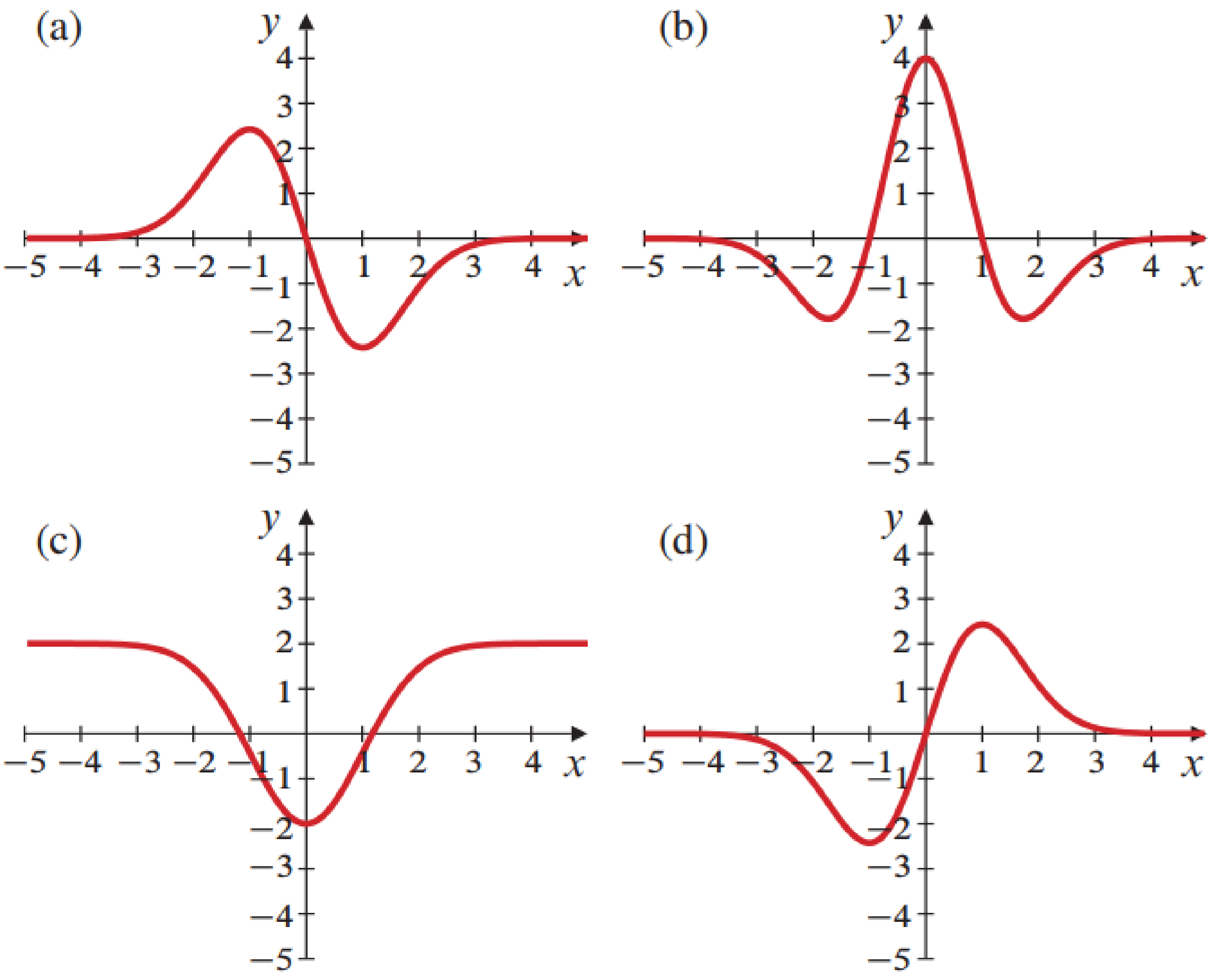
مسئله ۱۴. تمرین ۳۸ مسائل بخش پنجم فصل ۴ کتاب آدامز: نشان دهید نمودار تابع $y = f(x)$، خط مماس خود را در نقطهٔ عطف قطع می‌کند. (راهنمایی: حالت‌هایی که خط مماس، عمودی و غیر عمودی است را جداگانه بررسی کنید.)

مسئله ۱۵. مشابه تمرینات ۳۹ و ۴۰ مسائل بخش پنجم فصل ۴ کتاب آدامز: آیا می‌توانید یک آزمون مشتق مرتبهٔ چهارم بیان و ثابت کنید؟ آیا آزمون مشق مرتبهٔ سوم (برای یافتن اکسترمم‌های موضعی) معنی دارد؟ برای یافتن نقاط عطف چطور؟ (راهنمایی: می‌توانید از توابع $f(x) = x^n$ و $g(x) = -x^n$، برای nهای طبیعی مختلف، برای رسیدن به حدس خود استفاده کنید.)

مسئله ۱۶. تمرین ۳۴ مسائل بخش سوم فصل ۴ کتاب آدامز: فرض کنید f مشتق مرتبهٔ سوم پیوسته دارد. مطلوبست محاسبهٔ حد زیر

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x+۳h) - ۳f(x+h) + ۳f(x-h) - f(x-۳h)}{h^۳}.$$

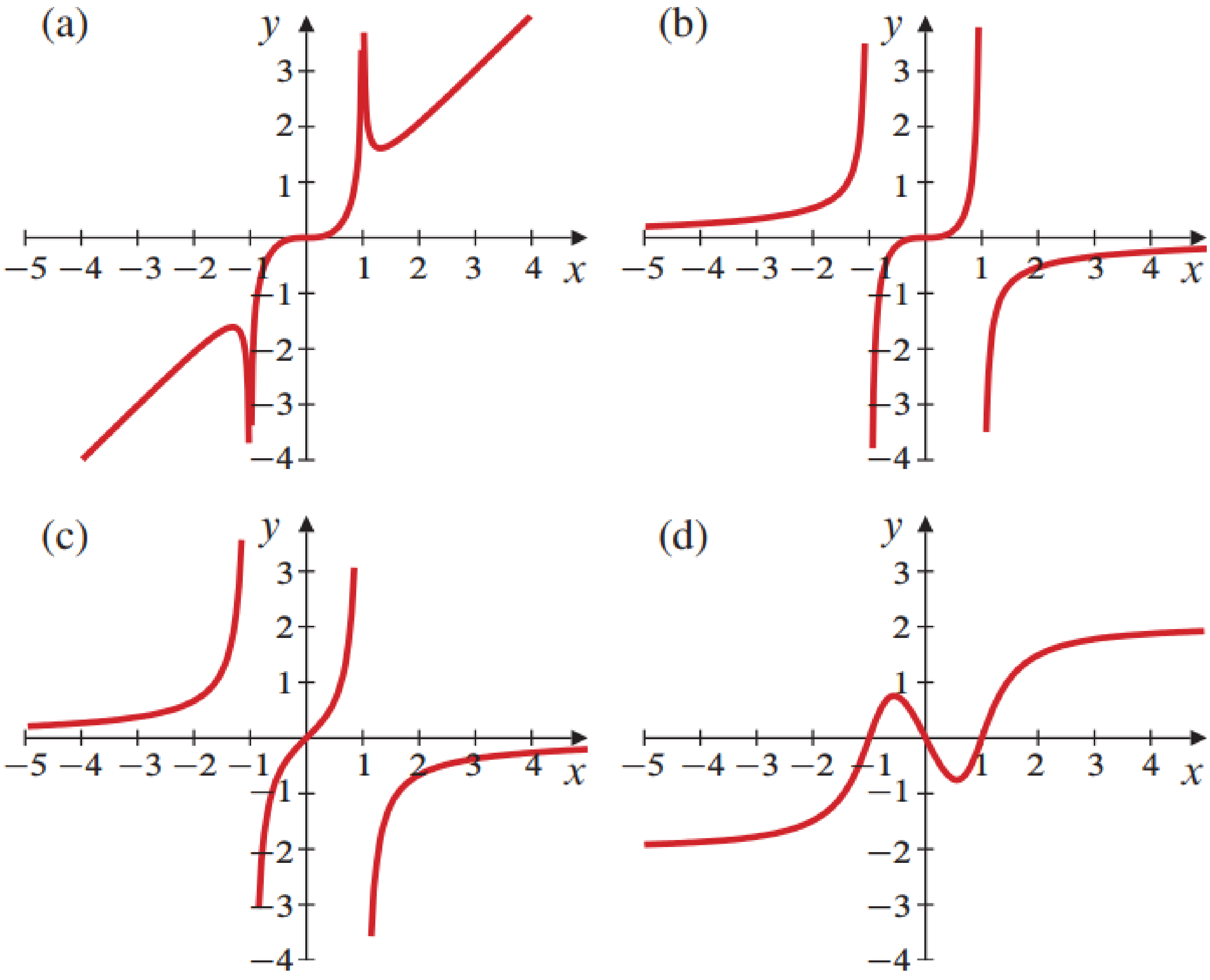
مسئله ۱۷. تمرینات ۱ و ۲ مسائل بخش ششم فصل ۴ کتاب آدامز: نمودارهای شکل زیر، نمودارهای توابع f، f'، f'' و g هستند. مشخص کنید کدام نمودارها مربوط به کدام یکی از توابع یاد شده است؟



همچنین برای توابع مربوط به هر کدام از نمودارهای شکل فوق، هر اطلاعاتی (مانند تقارن تابع، رفتار مجانبی تابع، بازه‌های صعودی و یا نزولی بودن تابع، نقاط بحرانی تابع، نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع، فواصل تقعر و یا تحدب تابع، نقاط عطف تابع و ...) را به‌صورت تقریبی مشخص کنید.

مسئله ۱۸. تمرینات ۳ و ۴ مسائل بخش ششم فصل ۴ کتاب آدامز: نمودارهای شکل زیر، نمودارهای توابع $f(x)=\frac{x}{۱-x^{۲}}$، $g(x)=\frac{x^{۳}}{۱-x^{۴}}$، $h(x)=\frac{x^{۳}-x}{\sqrt{x^{۶}+۱}}$ و $k(x)=\frac{x^{۳}}{\sqrt{|x^{۴}-۱|}}$ هستند. مشخص کنید، کدام نمودار مربوط به کدام تابع فوق است.

همچنین برای توابع مربوط به هر کدام از نمودارهای شکل فوق، هر اطلاعاتی (مانند تقارن تابع، رفتار مجانبی تابع، بازه‌های صعودی و یا نزولی بودن تابع، نقاط بحرانی تابع، نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع، فواصل تقعر و یا تحدب تابع، نقاط عطف تابع و ...) را به‌صورت تقریبی مشخص کنید.



مسئله ۱۹. تمرین ۵ مسائل بخش ششم فصل ۴ کتاب آدامز: نمودار تقریبی تابعی با ویژگی‌های زیر را رسم کنید و به‌صورت تقریبی در مورد تقارن آن، رفتار مجانبی آن، بازه‌های صعودی و یا نزولی بودن آن، نقاط بحرانی آن، نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی آن، فواصل تقعر و یا تحدب آن، نقاط عطف آن و ... بحث کنید.

- $f(۰) = ۱$، $f(\pm) = ۱$، $f(۲) = ۱$.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ۲$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -۱$.
- $f'(x) > ۰$ روی $(-\infty, ۰) \cup (۱, +\infty)$ و $f'(x) < ۰$ روی $(۰, ۱)$.
- $f''(x) > ۰$ روی $(-\infty, ۰) \cup (۰, ۲)$ و $f''(x) < ۰$ روی $(۲, +\infty)$.

مسئله ۲۰. تمرینات ۷ تا ۲۹ مسائل بخش ششم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، نمودار توابع داده شده را به‌کمک اطلاعاتی که از طریق مشتق اول و دوم تابع، می‌توان به‌دست آورد، رسم کنید.

آ) $f(x) = (x^۲ - ۱)^۳$.

ب) $f(x) = x(x^۲ - ۱)^۲$.

ج) $f(x) = \frac{۲ - x}{x}$.

د) $f(x) = \frac{x - ۱}{x + ۱}$.

ه) $f(x) = \frac{x^۳}{۱ + x}$.

و) $f(x) = \frac{۱}{۴ + x^۲}$.

ز) $f(x) = \frac{۱}{۲ - x^۲}$.

ح) $f(x) = \frac{x}{x^۲ - ۱}$.

ط) $f(x) = \frac{x^۲}{x^۲ - ۱}$.

ی) $f(x) = \frac{x^۳}{x^۲ - ۱}$.

ک) $f(x) = \frac{x^۳}{x^۲ + ۱}$.

ل) $f(x) = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱}$.

م) $f(x) = \frac{x^۲ - ۴}{x + ۱}$.

ن) $f(x) = \frac{x^۲ - ۲}{x^۲ - ۱}$.

س) $f(x) = \frac{x^۳ - ۴x}{x^۲ - ۱}$.

ع) $f(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x^۲}$.

ف) $f(x) = \frac{x^۵}{(x^۲ - ۱)^۲}$.

ص) $f(x) = \frac{(۲ - x)^۲}{x^۳}$.

ق) $f(x) = \frac{۱}{x^۳ - ۴x}$.

ر) $f(x) = \frac{x}{x^۲ + x - ۲}$.

ش) $f(x) = \frac{x^۳ - ۳x^۲ + ۱}{x^۳}$.

ت) $f(x) = x + \sin x$.

ث) $f(x) = x + ۲\sin x$.

مسئله ۲۱. تمرینات ۱ تا ۱۰ مسائل بخش نهم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، خطی‌سازی توابع در

همسایگی نقاط داده شده را بیابید.

آ) $x^{۲}$ در اطراف نقطهٔ $x = ۳$.

ب) $x^{-۳}$ در اطراف نقطهٔ $x = ۲$.

ج) $\sqrt{۴ - x}$ در اطراف نقطهٔ $x = ۰$.

د) $\sqrt{۳ + x^{۲}}$ در اطراف نقطهٔ $x = ۱$.

ه) $\frac{۱}{(۱ + x)^{۲}}$ در اطراف نقطهٔ $x = ۲$.

و) $\frac{۱}{\sqrt{x}}$ در اطراف نقطهٔ $x = ۴$.

ز) $\sin x$ در اطراف نقطهٔ $x = \pi$.

ح) $\cos ۲x$ در اطراف نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۳}$.

ط) $\sin^{۲} x$ در اطراف نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۶}$.

ی) $\tan x$ در اطراف نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۴}$.

مسئله ۲۲. تمرینات ۱۵ تا ۲۲ مسائل بخش نهم فصل ۴ کتاب آدامز: با انجام یک خطی‌سازی مناسب برای یک تابع در اطراف نقطه‌ای مطلوب، در هر کدام از موارد زیر، مقدار تقریبی اعداد داده شده، علامت خطای تقریب، مقدار خطای تقریب، و بازه‌ای که حتماً مقدار (واقعی) این اعداد در آن قرار دارد را بیابید.

آ) $\sqrt{۵۰}$.

ب) $\sqrt{۴۷}$.

ج) $\sqrt[۴]{۸۵}$.

د) $\frac{۱}{۲/۰۰۳}$.

ه) $\cos(۴۶^\circ)$.

و) $\sin(\frac{\pi}{۵})$.

ز) $\sin(۳/۱۴)$.

ح) $\sin(۳۳^\circ)$.

مسئله ۲۳. تمرین ۲۹ مسائل بخش نهم فصل ۴ کتاب آدامز: اگر $g(۲) = ۱$، $g'(۲) = ۲$ و $|g''(x)| < ۱ + (x - ۲)^{۲}$ برای هر $x > ۰$ برقرار باشد، بهترین تقریب ممکنی که می‌توان برای $g(۱/۸)$ پیدا کرد را بیابید. خطا حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟

مسئله ۲۴. تمرین ۳۰ مسائل بخش نهم فصل ۴ کتاب آدامز: نشان دهید تقریب خطی تابع $\sin\theta$ در نقطهٔ $\theta = ۰$، تابع $L(\theta) = \theta$ می‌باشد. حداکثر درصد خطا در تقریب $\sin\theta \approx \theta$ چقدر می‌تواند باشد، وقتی‌که $|\theta|$ کمتر از ۱۷° باشد.

مسئله ۲۵. تمرینات ۲، ۴ تا ۸ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، چندجمله‌ای تیلور توابع داده شده را، حول نقاط مطرح شده، و تا مرتبهٔ گفته شده، بیابید.

آ) $\cos x$ حول نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۴}$، تا مرتبهٔ ۳.

ب) $\sec x$ حول نقطهٔ $x = ۰$، تا مرتبهٔ ۳.

ج) $\sqrt{x}$ حول نقطهٔ $x = ۴$، تا مرتبهٔ ۳.

د) $\frac{۱}{۱ - x}$ حول نقطهٔ $x = ۰$، تا مرتبهٔ n.

ه) $\frac{۱}{۲ + x}$ حول نقطهٔ $x = ۱$، تا مرتبهٔ n.

و) $\sin(۲x)$ حول نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۲}$، تا مرتبهٔ $۲n - ۱$.

مسئله ۲۶. تمرینات ۹ تا ۱۲ و ۱۴ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ دوم توابع داده شده را حول نقاط مطرح شده بیابید، و به‌کمک آنها، تقریبی از مقدارهای داده شده را به‌دست آورید. علامت خطا و مقدار خطای تقریب را نیز محاسبه کنید. همچنین کوچک‌ترین بازه‌ای را که حتماً مطمئن شویم عدد داده شده در آن قرار دارد را مشخص کنید.

آ) $x^{\frac{۱}{۳}}$ حول نقطهٔ $x = ۸$، و مقدار تقریبی $۹^{\frac{۱}{۳}}$.

ب) $\sqrt{x}$ حول نقطهٔ $x = ۶۴$، و مقدار تقریبی $\sqrt{۶۱}$.

ج) $\frac{۱}{x}$ حول نقطهٔ $x = ۱$، و مقدار تقریبی $\frac{۱}{۱٫۰۲}$.

د) $\tan^{-۱} x$ حول نقطهٔ $x = ۱$، و مقدار تقریبی $\tan^{-۱}(۰٫۹۷)$.

ه) $\sin x$ حول نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۴}$، و مقدار تقریبی $\sin(۴۷^{\circ})$.

مسئله ۲۷. تمرینات ۲۳ تا ۲۶ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: به‌کمک چندجمله‌ای تیلور یا مکلورن توابع شناخته شده، و با تغییر متغیر مناسب، و محاسبات لازم، موارد زیر را حل کنید.

آ) چندجمله‌ای تیلور $\sin^{2} x$ تا مرتبهٔ ۴، حول نقطهٔ $x = ۰$. (راهنمایی: $\sin^{2} x = \frac{۱-\cos(۲x)}{۲}$.)

ب) چندجمله‌ای تیلور $\sin x$ تا مرتبهٔ ۵، حول نقطهٔ $x = \pi$.

ج) چندجمله‌ای تیلور $\frac{۱}{۱+۲x^{۲}}$ تا مرتبهٔ ۶، حول نقطهٔ $x = ۰$.

د) چندجمله‌ای تیلور $\cos(۳x-\pi)$ تا مرتبهٔ ۸، حول نقطهٔ $x = ۰$.

مسئله ۲۸. تمرینات ۲۷ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: چندجمله‌ای مکلورن $f(x) = x^{۳}$ را تا هر مرتبه‌ای بیابید.

مسئله ۲۹. تمرینات ۲۸ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: چندجمله‌ای تیلور $f(x) = x^{۳}$ را حول نقطهٔ $x = ۱$، تا هر مرتبه‌ای بیابید.

مسئله ۳۰. تمرینات ۳۲ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: بسط تیلور $f(x) = \sin x$ را حول نقطهٔ $x = ۰$ بنویسید و مشخص کنید حداقل تا چه مرتبه‌ای اگر این بسط را بنویسیم، یعنی حداقل چه درجهٔ چندجمله‌ای تیلور را برای این تابع در نظر بگیریم، می‌توانیم مطمئن باشیم که این چندجمله‌ای، مقدار $\sin ۱$ را تا ۵ رقم اعشار دقیق ارائه می‌دهد. (دقت کنید منظور از $\sin ۱$، یعنی سینوس یک رادیان.)

مسئله ۳۱. مشابه تمرینات ۳۵ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: با مشتق جمله‌به‌جمله گرفتن از چندجمله‌ای‌های مکلورن $\frac{۱}{۱-x}$ (از هر مرتبه‌ای)، چندجمله‌ای‌های مکلورن $\frac{۱}{(۱-x)^{۲}}$ را بیابید.

مسئله ۳۲. تمرین شماره ۱۶ مسائل مروری بخش مروری فصل ۴ کتاب آدامز: به‌کمک بسط تیلور $\sin^{۲} x$ تا مرتبهٔ

۶، حول نقطهٔ $x = ۰$، مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۳\sin^۲ x - ۳x^۲ + x^۴}{x^۶}.$$

مسئله ۳۳. تمرین شماره ۲ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۴ کتاب آدامز: شما در یک تانک هستید (از نوع نظامی) و از روی محور yها به سمت مبدأ در حال حرکت هستید. در زمان $t = ۰$ شما از مبدأ ۴ کیلومتر فاصله دارند و ۱۰ دقیقه بعد شما ۲ کیلومتر تا مبدأ فاصله دارید. سرعت شما در حال کاهش است و این کاهش متناسب با فاصلهٔ شما از مبدأ است. شما می‌دانید که یک تانک دشمن، جایی در روی قسمت مثبت محور xها منتظر است، اما یک دیوار بلند در امتداد منحنی $xy = ۱$ وجود دارد (تمام مسافت‌ها به کیلومتر است) و جلوگیری می‌کند از این‌که شما بتوانید ببینید که تانک دشمن، موقعیت‌اش چیست. با چه سرعتی باید برجک اسلحه تانک شما بتواند بچرخد تا شانس شما برای زنده ماندن در برخورد را به حداکثر برساند؟

مسئله ۳۴. تابع مشتق‌پذیر $f : (۰, +\infty) \to \mathbb{R}$ به‌گونه‌ای است که $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = l$. بدون استفاده مستقیم از قاعدهٔ هوپیتال، نشان دهید $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$. (راهنمایی: از روند اثبات قاعدهٔ هوپیتال، استفاده کنید.)

مسئله ۳۵. بدون استفاده مستقیم از قاعدهٔ هوپیتال، نشان دهید

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{\cos^{-۱} x}{\sqrt{۱ - x^۲}} = ۱.$$

(راهنمایی: از روند اثبات قاعدهٔ هوپیتال، استفاده کنید.)

مسئله ۳۶. نشان دهید تابع مشتق‌پذیر $f : (۰, ۱) \to \mathbb{R}$ وجود ندارد به‌طوری‌که $f(۰) = f'(۰) = ۰$ و $\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)}{f'(x)} = ۱$. (راهنمایی: قاعدهٔ هوپیتال را برای تابع $\frac{xf(x)}{f(x)}$ به کار ببرید. البته بهتر است، بدون استفاده مستقیم از قاعدهٔ هوپیتال، این مطلب را ثابت کنید.)

مسئله ۳۷. فرض کنید $h > ۰$ یک عدد ثابت باشد. نشان دهید تابعی مانند f وجود ندارد به‌طوری‌که $f'(x)$ برای هر

$x \geq ۰$ موجود، $f'(۰) = ۰$ و $f'(x) \geq h$ برای $x > ۰$. (راهنمایی: به برهان خلف فرض کنید چنین fی وجود دارد. حال تعریف $f'(۰)$ را به‌کمک تعریف ϵ و δای حد، و برای $\epsilon = \frac{h}{۲}$ در نظر بگیرید. پس نتیجه می‌شود که برای این ϵ، یک δ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $۰ < |x - ۰| < \delta$، داریم

$$\left|\frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰}\right| < \frac{h}{۲}.$$

حال روی بازهٔ $\left[۰, \frac{\delta}{۲}\right]$ قضیهٔ مقدار میانگین را برای تابع f به‌کار ببرید و به تناقض برسید.)

مسئله ۳۸. فرض کنید $۱ < p < +\infty$ و $x, y > ۰$. نشان دهید ثابت $C_p > ۰$ موجود است به‌طوری‌که

$$(x + y)^p \leq C_p(x^p + y^p).$$

(راهنمایی: کافی است ماکزیمم سراسری $f(t) = \frac{(t + ۱)^p}{t^p + ۱}$ را روی $(۰, +\infty)$ پیدا کنید و قرار دهید $t = \frac{x}{y}$.)

مسئله ۳۹. چه ارتباطی بین قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع f و مفاهیم تقریب خطی تابع f، و چند جمله‌ای تیلور مرتبهٔ اول تابع f (هر دو به همراه تخمین باقیماندهٔ آنها) وجود دارد.

مسئله ۴۰. توابع f و g روی $\mathbb{R}$ طوری هستند که f دوبار مشتق‌پذیر است و $f'' + f'g = f$. نشان دهید که اگر f در دو نقطهٔ متمایز a و b، با $a < b$، صفر گردد، آن‌گاه بایستی روی بازهٔ $[a, b]$ متحد صفر باشد. (راهنمایی: فرض کنید f در این بازه متحد صفر نباشد، چون f پیوسته است، پس در این بازه حداقل یک ماکسیمم و حداقل یک مینیمم موضعی دارد. حال قضیهٔ فرما را به همراه آزمون مشتق مرتبهٔ دوم، در یکی از این نقاط اکسترمم موضعی، در نظر بگیرید.)

مسئله ۴۱. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = ۰$، و یا $f'(x) = ۰$، آنگاه f تابع ثابت است. (راهنمایی: $g = \frac{f^۲}{۲}$، یا $g = f^۲$، و یا $g = f^۳$ را در نظر

بگیرید.)

مسئله ۴۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی است که $f(x)\leq ۰$، برای هر x، و $f''(x)\geq ۰$، برای هر x. نشان دهید f تابعی ثابت است. (راهنمایی: چندجمله‌ای تیلور بنویسید.)

مسئله ۴۳. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر است به‌طوری‌که برای یک عدد حقیقی مثبت α، $f'(x)\geq\alpha$، برای هر x. نشان دهید f تابعی یک‌به‌یک و پوشا است. (راهنمایی: چندجمله‌ای تیلور بنویسید.)

مسئله ۴۴. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متناوب با دوره تناوب ۲π و f'' روی $\mathbb{R}$ موجود با $|f''(x)|\leq ۲$، برای هر $x\in\mathbb{R}$، باشد. نشان دهید $|f'(x)|\leq ۲\pi$ برای هر $x\in\mathbb{R}$. (راهنمایی: چندجمله‌ای تیلور را حول نقطهٔ x بنویسید، تخمین خطای آن را انجام دهید و به آن در نقطهٔ $x+۲\pi$ نگاه کنید.)

مسئله ۴۵. فرض کنید f روی $[a,+\infty)$ دوبار مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید

$$\sup_{x\in[a,+\infty)}|f'(x)|\leq ۲\sqrt{\sup_{x\in[a,+\infty)}|f(x)|\times\sup_{x\in[a,+\infty)}|f''(x)|}.$$

(راهنمایی: چندجمله‌ای تیلور بنویسید.)