با یاد او

سری چهارم تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک (مبحث مشتق)

مسئله ۱. تمرین ۲۲ مسائل بخش اول فصل ۲ کتاب آدامز: تمام نقاط بر روی منحنی $y = \frac{1}{x}$ را طوری بیابید که خط مماس بر منحنی در آن نقاط، بر خط $y = 4x - 3$ عمود باشد.

مسئله ۲. تمرین ۲۳ مسائل بخش اول فصل ۲ کتاب آدامز: به‌ازای چه مقادیری از k، خط $x + y = k$ بر منحنی $y = x^2$ عمود است.

مسئله ۳. تمرین ۳۲ مسائل بخش اول فصل ۲ کتاب آدامز: فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای و a یک عدد حقیقی باشد. ابتدا نشان دهید می‌توان $p(x)$ را برای یک n مناسب به‌صورت زیر نوشت

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

سپس نشان دهید خط $y = l(x) = m(x-a) + b$ بر نمودار $y = f(x)$ در $x = a$ مماس است مشروط بر آن‌که

$$p(x) - l(x) = (x-a)^2 Q(x),$$

برای یک چندجمله‌ای مناسب $Q(x)$.

مسئله ۴. گوییم توابع $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ در نقطهٔ $c \in (a,b)$ بر هم مماس هستند درصورتی‌که

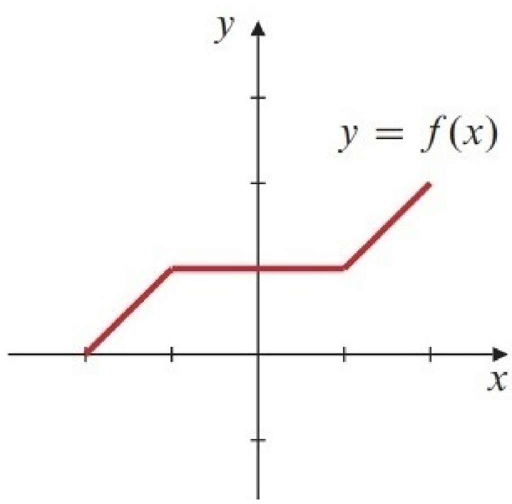
$$f(c) = g(c), \qquad \lim_{x\to c} \frac{f(x) - g(x)}{x - c} = 0.$$

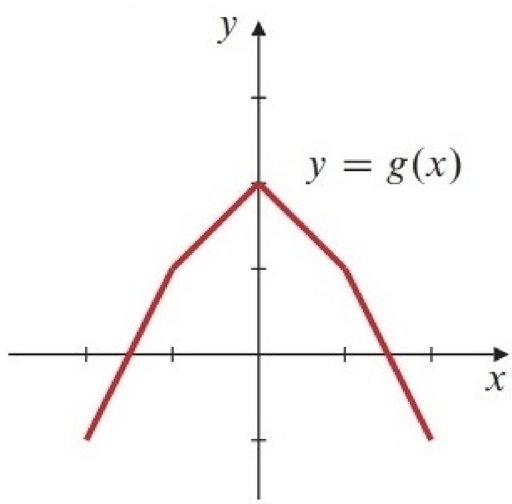
نشان دهید f در $x = c$ مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر خط راست (غیر قائم)، به معادلهٔ $l(x) = mx + b$، موجود باشد که f, l در $x = c$ بر هم مماس باشند.

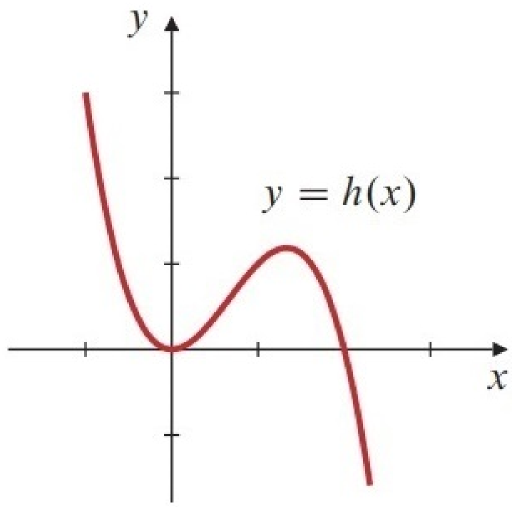
مسئله ۵. نشان دهید f در $x=a$ مشتق‌پذیر و $f'(a)=m$ است اگر و فقط اگر تابع $\mathrm{E}(x)$ موجود باشد که

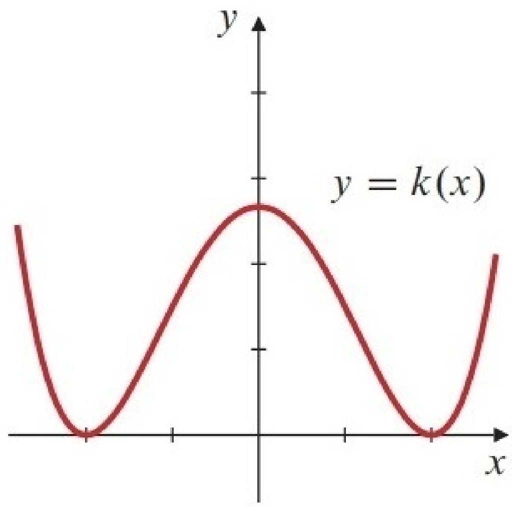
$$f(x)-f(a)-m(x-a)=\mathrm{E}(x)(x-a), \qquad \lim_{x\to a}\mathrm{E}(x)=\circ.$$

مسئله ۶. تمرینات ۱ تا ۶ مسائل بخش دوم فصل ۲ کتاب آدامز: نمودارهای زیر را برای توابع $y=f(x)$، $y=g(x)$، $y=h(x)$، و $y=k(x)$ در نظر بگیرید. بررسی کنید این توابع کجاها مشتق‌پذیر هستند و کجاها نیستند. نمودار تابع مشتق هر کدام را نیز رسم کنید.









مسئله ۷. <u>تمرین ۲۵ مسائل بخش دوم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> آیا به‌ازای یک عدد حقیقی c، تابع

$$f_c(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

می‌تواند در مبدأ مشتق‌پذیر باشد؟

مسئله ۸. <u>تمرین ۲۶ مسائل بخش دوم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> آیا به‌ازای یک عدد حقیقی c، تابع

$$f_c(x) = \begin{cases} x|x| & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

می‌تواند در مبدأ مشتق‌پذیر باشد؟

مسئله ۹. <u>تمرین ۲۷ مسائل بخش دوم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> نقاطی که تابع $f(x) = \left|x^2 + 3x + 2\right|$ در آنها مشتق‌پذیر نیست را بیابید.

مسئله ۱۰. <u>تمرین ۴۹ مسائل بخش دوم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> شیب خط راستی را که از نقطهٔ $(-2, 0)$ می‌گذرد و بر منحنی $y = \sqrt{x}$ مماس است را بیابید.

مسئله ۱۱. <u>تمرین ۵۰ مسائل بخش دوم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> نشان دهید دو خط مماس متمایز بر منحنی $y = x^2$، و گذرا از نقطهٔ (a, b) وجود دارد، مشروط بر آن‌که $b < a^2$ باشد. در مورد تعداد خطوط مماس بر منحنی $y = x^2$، و گذرا از نقطهٔ (a, b)، وقتی‌که $b = a^2$ و همچنین وقتی‌که $b > a^2$، نیز بحث کنید.

مسئله ۱۲. <u>تمرین ۵۱ مسائل بخش دوم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> نشان دهید مشتق یک تابع زوج، تابع فرد و مشتق یک تابع فرد، تابع زوج است.

مسئله ۱۳. <u>تمرین ۵۳ مسائل بخش دوم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> به‌کمک اتحاد

$$a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲),$$

و تعریف مشتق (با حد)، تابع مشتق را برای $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ بیابید.

مسئله ۱۴. <u>تمرین ۵۵ مسائل بخش دوم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> به‌کمک قضیهٔ بسط دوجمله‌ای

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{۱}a^{n-۱}b+\frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}a^{n-۲}b^۲+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times ۲\times ۳}a^{n-۳}b^۳+\cdots+b^n,$$

که برای هر a و b حقیقی و هر عدد طبیعی n برقرار است، و همچنین تعریف مشتق، تحقیق کنید که

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-۱}.$$

مسئله ۱۵. <u>تمرینات ۸، ۹، ۱۱، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۳، ۲۸، ۲۹ و ۳۲ مسائل بخش سوم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> مطلوبست محاسبهٔ مشتق توابع زیر و ساده کردن آنها تا حد امکان.

آ) $y=۳\sqrt[۳]{t^۲}-\frac{۲}{\sqrt{t^۳}}$.

ب) $y=\frac{۳}{۵}x^{\frac{۵}{۳}}-\frac{۵}{۳}x^{-\frac{۳}{۵}}$.

ج) $y=\sqrt{x}\left(۵-x-\frac{x^۲}{۳}\right)$.

د) $g(u)=\frac{u\sqrt{u}-۳}{u^۲}$.

ه) $y=\frac{۲+t+t^۲}{\sqrt{t}}$.

و) $z=\frac{x-۱}{x^{\frac{۲}{۳}}}$.

ز) $s=\frac{۱+\sqrt{t}}{۱-\sqrt{t}}$.

ح) $f(r)=(r^{-۲}+r^{-۳}-۴)(r^۲+r^۳+۱)$.

ط) $y=(x^۲+۴)(\sqrt{x}+۱)(۵x^{\frac{۲}{۳}}-۲)$.

ی) $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-۱)(۲-x)(۱-x^۲)}{\sqrt{x}(۳+۲x)}$.

مسئله ۱۶. <u>تمرینات ۳۳ تا ۳۶ مسائل بخش سوم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> فرض کنید $f(۲)=۲$ و $f'(۲)=۳$ باشد. مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده بیابید.

آ) $\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{x^۲}{f(x)}\right)\right|_{x=۲}$.

ب) $\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x^۲}\right)\right|_{x=۲}$.

ج) $\left.\frac{d}{dx}\left(x^۲f(x)\right)\right|_{x=۲}$.

د) $\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x^۲+f(x)}\right)\right|_{x=۲}$.

مسئله ۱۷. تمرین ۴۰ مسائل بخش سوم فصل ۲ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ

$$\left.\frac{d}{dt}\left((۱+t)(۱+۲t)(۱+۳t)(۱+۴t)\right)\right|_{t=۰}.$$

مسئله ۱۸. تمرین ۴۴ مسائل بخش سوم فصل ۲ کتاب آدامز: مطلوبست یافتن همهٔ خطوط افقی که بر منحنی $y=x^۲(۴-x^۲)$ مماس باشند.

مسئله ۱۹. تمرین ۴۷ مسائل بخش سوم فصل ۲ کتاب آدامز: مطلوبست یافتن همهٔ خطوط مماس بر منحنی $y=\frac{۱}{x}$، و گذرا از نقطهٔ $(۰,b)$ که در آن $b\neq ۰$.

مسئله ۲۰. تمرین ۵۱ مسائل بخش سوم فصل ۲ کتاب آدامز: فرض کنید f در x مشتق‌پذیر باشد و $f(x)>۰$. نشان دهید

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)}=\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}.$$

مسئله ۲۱. تمرین ۵۲ مسائل بخش سوم فصل ۲ کتاب آدامز: نشان دهید $f(x)=|x^۳|$ در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و مشتق آن را بیابید.

مسئله ۲۲. تمرینات ۵، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۴، ۵۱، ۱۶ مسائل بخش چهارم فصل ۲ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ مشتق توابع زیر

آ) $F(t) = \left(۲ + \frac{۳}{t}\right)^{-۱۰}$.

ب) $(۱ - ۲t^۲)^{-\frac{۳}{۲}}$.

ج) $y = |۱ - x^۲|$.

د) $f(t) = |۲ + t^۳|$.

ه) $y = ۴x + |۴x - ۱|$.

و) $y = \frac{۱}{۲ + \sqrt{۳x + ۴}}$.

ز) $f(x) = \left(۱ + \sqrt{\frac{x - ۲}{۳}}\right)^۴$.

ح) $z = \left(u + \frac{۱}{u - ۱}\right)^{-\frac{۵}{۳}}$.

ط) $y = \frac{x^۵\sqrt{۳ + x^۶}}{(۴ + x^۲)^۳}$.

مسئله ۲۳. تمرینات ۲۲ تا ۲۹ مسائل بخش چهارم فصل ۲ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ مشتق توابع زیر بر حسب f'، یعنی مشتق تابع f.

آ) $f(۲t + ۳)$.

ب) $f(۵x - x^۲)$.

ج) $\left[f\left(\frac{۲}{x}\right)\right]^۳$.

د) $\sqrt{۳ + ۲f(x)}$.

ه) $f\left(\sqrt{۳ + ۲t}\right)$.

و) $f\left(۲f(۳f(x))\right)$.

ز) $f\left(۲ - ۳f(۴ - ۵t)\right)$.

مسئله ۲۴. تمرین ۳۴ مسائل بخش چهارم فصل ۲ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ $F'(۰)$ برای تابع

$$F(x) = (۱ + x)(۲ + x)^۲(۳ + x)^۳(۴ + x)^۴.$$

مسئله ۲۵. تمرین ۳۵ مسائل بخش چهارم فصل ۲ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ y' برای تابع

$$y = \left(x + \left((۳x)^۵ - ۲\right)^{-\frac{۱}{۲}}\right)^{-۶}.$$

مسئله ۲۶. تمرین ۳۷ مسائل بخش چهارم فصل ۲ کتاب آدامز: معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = \left(۱ + x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{\frac{۳}{۲}}$ را در

نقطهٔ $x = -۱$ بیابید.

مسئله ۲۷. تمرین ۳۸ مسائل بخش چهارم فصل ۲ کتاب آدامز: معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = (ax+b)^{۸}$ را در نقطهٔ $x = \frac{b}{a}$ بیابید.

مسئله ۲۸. تمرین ۳۹ مسائل بخش چهارم فصل ۲ کتاب آدامز: معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = \frac{۱}{(x^{۲}-x+۳)^{\frac{۳}{۲}}}$ را در نقطهٔ $x = -۲$ بیابید.

مسئله ۲۹. تمرین ۴۵ مسائل بخش چهارم فصل ۲ کتاب آدامز: آیا به‌کمک قاعدهٔ رنجیره‌ای، می‌توان مشتق توابع $|x^{۲}|$ و $|x|^{۲}$ را در مبدأ محاسبه کرد؟ آیا اصلاً این توابع در مبدأ مشتق‌پذیر هستند؟ چرا؟

مسئله ۳۰. تمرین ۴۶ مسائل بخش چهارم فصل ۲ کتاب آدامز: اثبات قاعدهٔ زنجیره‌ای را از کتاب درسی نگاه کنید.

حال بگویید چرا «اثبات» زیر برای قاعدهٔ زنجیره‌ای مشکل دارد؟

قرار دهید $k = g(x+h) - g(x)$. در این‌صورت $\lim_{h\to ۰} k = ۰$. پس

$$\begin{aligned}
\left[f\left(g(x)\right)\right]' &= \lim_{h\to ۰} \frac{f\left(g(x+h)\right) - f\left(g(x)\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to ۰} \frac{f\left(g(x+h)\right) - f\left(g(x)\right)}{g(x+h)-g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to ۰} \frac{f\left(g(x+h)\right) - f\left(g(x)\right)}{k} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

مسئله ۳۱. تمرینات ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۳، ۲۶، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳ و ۳۴ بخش پنجم فصل ۲ کتاب آدامز:

مشتق توابع زیر را محاسبه و نتیجه را تا حد امکان ساده کنید. همچنین قبل از شروع به محاسبهٔ مشتق، اگر ممکن باشد، ابتدا توابع را ساده کنید و بعداً مشتق بگیرید.

آ) $\cos\left(\sqrt{x}\right)$.

ب) $y=\sqrt{۱+\cos x}$.

ج) $\sin(۲\cos x)$.

د) $g(\theta)=\tan\left(\theta\sin\theta\right)$.

ه) $y=\sec\left(\frac{۱}{x}\right)$.

و) $\tan x+\cot x$.

ز) $\tan(۳x)\cdot\cot(۳x)$.

ح) $\frac{\cos x}{۱+\sin x}$.

ط) $x^۲\cos(۳x)$.

ی) $g(t)=\sqrt{\frac{\sin t}{t}}$.

ک) $v=\sec(x^۲)\tan(x^۲)$.

ل) $z=\frac{\sin\sqrt{x}}{۱+\cos\sqrt{x}}$.

مسئله ۳۲. تمرینات ۳۵ و ۳۶ مسائل بخش پنجم فصل ۲ کتاب آدامز: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

آ) $\sin(\cos(\tan x))$.

ب) $f(s)=\cos(s+\cos(s+\cos s))$.

مسئله ۳۳. تمرین ۳۷ مسائل بخش پنجم فصل ۲ کتاب آدامز: با مشتق گرفتن از اتحاد

$$\sin(۲x)=۲\sin x\cdot\cos x,$$

درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید.

$$\cos(۲x)=\cos^۲ x-\sin^۲ x.$$

مسئله ۳۴. تمرینات ۳۹ تا ۴۲ مسائل بخش پنجم فصل ۲ کتاب آدامز: معادلهٔ خطوط مماس و عمود بر منحنی $y=f(x)$ را در نقاط داده شده، در هر کدام از موارد زیر، بیابید.

آ) $y=\sin x$ در نقطهٔ $(\pi,۰)$.

ب) $y=\tan(۲x)$ در نقطهٔ $(۰,۰)$.

ج) $y = \sqrt{۲}\cos\left(\frac{x}{۴}\right)$ در نقطهٔ $(\pi, ۱)$.　　　　د) $y = \cos^۲ x$ در نقطهٔ $(\frac{\pi}{۳}, \frac{۱}{۴})$.

مسئله ۳۵. تمرین ۵۸ مسائل بخش پنجم فصل ۲ کتاب آدامز: اعداد a و b را طوری بیابید تا تابع $f(x)$ با ضابطهٔ زیر (در مبدأ) مشتق‌پذیر گردد.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x < ۰ \\ ۲\sin x + ۳\cos x & x \geq ۰. \end{cases}$$

مسئله ۳۶. تمرین ۵۹ مسائل بخش پنجم فصل ۲ کتاب آدامز: تعداد خطوط مماس بر منحنی $y = \cos x$، و گذرا از مبدأ را بیابید. همچنین شیب دو تا از چنین خطوط با بزرگ‌ترین شیب مثبت را (تا چند رقم اعشار) بیابید.

مسئله ۳۷. تمرینات ۱ تا ۱۲ مسائل بخش ششم فصل ۲ کتاب آدامز: y'، y''، و y''' را برای هر کدام از توابع زیر بیابید.

آ) $y = (۳ - ۲x)^۷$.

ب) $y = x^۲ - \frac{۱}{x}$.

ج) $y = \frac{۶}{(x-۱)^۲}$.

د) $y = \sqrt{ax+b}$.

ه) $y = x^{\frac{۱}{۳}} - x^{-\frac{۱}{۳}}$.

و) $y = x^{۱۰} + ۲x^۸$.

ز) $y = \frac{x-۱}{x+۱}$.

ح) $y = \tan x$.

ط) $y = \sec x$.

ی) $y = \cos(x^۲)$.

ک) $y = \frac{\sin x}{x}$.

مسئله ۳۸. تمرینات ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ و ۲۶ مسائل بخش ششم فصل ۲ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، یک فرمول برای ضابطهٔ تابع مشتق مرتبهٔ n-ام توابع داده شده حدس بزنید. سپس درستی آن را با استفاده از استقراء

ریاضی تحقیق کنید.

آ) $f(x) = x\sin(ax)$.

ب) $f(x) = \frac{۱}{|x|}$.

ج) $y = \sqrt{۱ - ۳x}$.

د) $y = \sin\left(ax + b\right)$.

مسئله ۳۹. تمرینات ۲۸ و ۲۹ مسائل بخش ششم فصل ۲ کتاب آدامز: اگر f و g دو بار مشتق‌پذیر باشند، نشان دهید

$$\left(fg\right)'' = f''g + ۲f'g' + fg''.$$

یک رابطه مشابه برای $\left(fg\right)'''$، $\left(fg\right)^{(۴)}$ و در حالت کلی برای $\left(fg\right)^{(n)}$ بیابید.

مسئله ۴۰. مشابه تمرین ۳۰ مسائل بخش ششم فصل ۲ کتاب آدامز: فرض کنید $f''(x)$ روی بازهٔ باز I موجود و در سه نقطهٔ متمایز، $f(x)$ صفر باشد. نشان دهید $f''(x)$ حداقل در یک نقطه از بازهٔ باز I بایستی صفر شود.

مسئله ۴۱. تمرین ۳۲ مسائل بخش ششم فصل ۲ کتاب آدامز: فرض کنید تابع $f(x)$ روی بازهٔ باز I دوبار مشتق‌پذیر باشد. اگر نقاط ۰ و ۲ متعلق به بازهٔ I باشند و داشته باشیم $f(۰) = f(۱) = ۰$، و $f(۲) = ۱$، نشان دهید

آ) وجود دارد $a \in I$ به‌طوری‌که $f'(a) = \frac{۱}{۲}$.

ب) وجود دارد $b \in I$ به‌طوری‌که $f''(b) > \frac{۱}{۲}$.

ج) وجود دارد $c \in I$ به‌طوری‌که $f'(c) = \frac{۱}{۷}$.

مسئله ۴۲. تمرینات ۱ تا ۴ مسائل بخش هفتم فصل ۲ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، مقدار نرخ تغییر توابع داده شده را وقتی‌که مقدار متغیر تابع (ورودی تابع) از مقدار اولیهٔ داده شده تا مقدار ثانویهٔ داده شده تغییر می‌کند، را بیابید. همچنین مقدار تقریبی تابع، بعد از این تغییر صورت گرفته را نیز محاسبه کنید.

آ) $y = \frac{۱}{x}$، وقتی‌که مقدار x از ۲ تا ۲٫۱ تغییر می‌کند.

ب) $f(x) = \sqrt{۳x + ۱}$، وقتی‌که مقدار x از ۱ تا ۱٫۰۸ تغییر می‌کند.

ج) $h(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{۴}\right)$، وقتی‌که مقدار t از ۲ تا $\frac{۱}{۱۰\pi} + ۲$ تغییر می‌کند.

د) $u = \tan\left(\frac{s}{۴}\right)$، وقتی‌که مقدار s از π تا $\pi - ۰٫۰۴$ تغییر می‌کند.

مسئله ۴۳. تمرینات ۵ تا ۱۰ مسائل بخش هفتم فصل ۲ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، درصد تقریبی تغییر در تابع $y = f(x)$ را طوری بیابید تا باعث افزایش دو درصد در مقدار متغیر ورودی، یعنی x، گردد.

آ) $y = x^۲$.

ب) $y = \frac{۱}{x}$.

ج) $y = \frac{۱}{x}$.

د) $y = \frac{۱}{x^۲}$.

ه) $y = x^۳$.

و) $y = \sqrt{x}$.

ز) $y = x^{-\frac{۲}{۳}}$.

مسئله ۴۴. تمرین ۱۵ مسائل بخش هفتم فصل ۲ کتاب آدامز: میزان نرخ تغییر قطر یک دایره را نسبت به (تغییر) مساحت آن، محاسبه کنید.

مسئله ۴۵. تمرین ۱۷ مسائل بخش هفتم فصل ۲ کتاب آدامز: میزان نرخ تغییر حجم یک کره با شعاع r (حجم کره برابر است با $\frac{۴}{۳}\pi r^۳$) را نسبت به (تغییر) شعاع، وقتی‌که $r = ۲$ متر می‌باشد، محاسبه کنید.

مسئله ۴۶. تمرین ۱۸ مسائل بخش هفتم فصل ۲ کتاب آدامز: میزان نرخ تغییر مساحت یک مربع را نسبت به (تغییر) طول قطر آن، محاسبه کنید.

مسئله ۴۷. <u>تمرین ۱۹ مسائل بخش هفتم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> میزان نرخ تغییر محیط یک دایره را نسبت به (تغییر) مساحت آن، محاسبه کنید.

مسئله ۴۸. <u>تمرین ۳۸ مسائل بخش هفتم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> در یک عملیات استخراج معدن، هزینه C (به دلار) برای استخراج هر تن سنگ معدن، توسط ضابطهٔ

$$C = 10 + \frac{20}{x} + \frac{x}{1000},$$

داده می‌شود که در آن x تعداد تن استخراج شده در روز است. (برای x کوچک، به‌دلیل صرفه‌جویی اقتصادی، C با افزایش x کاهش می‌یابد، اما برای x بزرگ، به‌دلیل تجهیزات بیش از حد و اضافه کار، C با x افزایش می‌یابد.) اگر هر تن از سنگ معدن را بتوان به قیمت ۱۳ دلار فروخت، هر روز چند تن باید استخراج شود تا سود روزانه معدن به حداکثر برسد؟

مسئله ۴۹. <u>تمرین ۴ مسائل بخش هشتم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$ روی بازهٔ $[0, x]$ و استفاده از این مطلب که $\sin x < x$ برای هر $x > 0$ (خود این مطلب نیز از قضیهٔ مقدار میانگین نتیجه می‌شود)، نشان دهید

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad \forall x > 0.$$

این نامساوی برای $x < 0$ نیز برقرار است. چرا؟

مسئله ۵۰. <u>تمرین ۵ مسائل بخش هشتم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> نشان دهید که $\tan x > x$، برای هر $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

مسئله ۵۱. <u>تمرینات ۸ تا ۱۵ مسائل بخش هشتم فصل ۲ کتاب آدامز:</u> در هر کدام از موارد زیر، بازه‌هایی که تابع $y = f(x)$ در آنها صعودی و یا نزولی است را بیابید.

آ) $f(x) = x^{۲} + ۲x + ۲$.

ب) $f(x) = x^{۳} - ۴x + ۱$.

ج) $f(x) = x^{۳} + ۴x + ۱$.

د) $f(x) = (x^{۲} - ۴)^{۲}$.

ه) $f(x) = \frac{۱}{x^{۲} + ۱}$.

و) $f(x) = x^{۳}(۵ - x)^{۲}$.

ز) $f(x) = x - ۲\sin x$.

ح) $f(x) = x + \sin x$.

مسئله ۵۲. بر روی چه بازه‌ای تابع $f(x) = x + ۲\sin x$ صعودی است؟

مسئله ۵۳. نشان دهید تابع $f(x) = x^{۳}$ روی کل اعداد حقیقی صعودی است اگرچه $f'(x) > ۰$ برای هر x حقیقی برقرار نیست.

مسئله ۵۴. تمرین ۱۷ مسائل بخش هشتم فصل ۲ کتاب آدامز: اثبات قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته را از کتاب درسی نگاه کنید. حال بگویید چرا «اثبات» زیر برای قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته مشکل دارد؟

طبق قضیهٔ مقدار میانگین برای f، عدد $c \in (a, b)$ وجود دارد که

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

مشابهاً

$$g(b) - g(a) = (b - a) g'(c).$$

پس

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

مسئله ۵۵. تمرین ۱۶ مسائل بخش هشتم فصل ۲ کتاب آدامز: فرض کنید $f(x)$ روی بازهٔ باز I مشتق‌پذیر باشد و در

n نقطهٔ متمایز ($n \geq ۲$) صفر شود. نشان دهید $f'(x)$ روی بازهٔ باز I، بایستی حداقل در $n-۱$ نقطهٔ متمایز صفر گردد.

مسئله ۵۶. مشابه تمرینات ۱۸ و ۲۰ مسائل بخش هشتم فصل ۲ کتاب آدامز: تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ \sin \frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰. \end{cases}$$

آ) نشان دهید f در مبدأ مشتق‌پذیر است و $f'(۰) = ۱$.

ب) نشان دهید تابع مشتق، یعنی f'، در مبدأ پیوسته نیست.

ج) نشان دهید f در هیچ همسایگی حول مبدأ صعودی نیست و درنتیجه در هیچ همسایگی حول مبدأ، f' نمی‌تواند مثبت باشد.

مسئله ۵۷. تمرین ۱۹ مسائل بخش هشتم فصل ۲ کتاب آدامز: نشان دهید تابع مشتق برای یک تابع مشتق‌پذیر با وجود این‌که می‌تواند پیوسته نباشد، ولی (همانند توابع پیوسته) دارای خاصیت مقدار بینی است.

مسئله ۵۸. تمرین شماره ۵ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۲ کتاب آدامز: فرض کنید $f(۰) = ۰$ و

$$|f(x)| > \sqrt{x}, \qquad \forall x > ۰.$$

نشان دهید f در مبدأ نمی‌تواند مشتق‌پذیر باشد.

مسئله ۵۹. تمرین شماره ۶ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۲ کتاب آدامز: فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار روی $\mathbb{R}$ باشد به‌طوری‌که $f(۰) \neq ۰$ و $f(x+y) = f(x)f(y)$، برای هر x و y. نشان دهید که

$f(\circ) = 1$ و

$$f'(x) = f'(\circ) f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

مسئله ۶۰. تمرین شماره ۷ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۲ کتاب آدامز: فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار روی $\mathbb{R}$ باشد و در رابطهٔ $f(x+y) = f(x) + f(y)$، برای هر x و y صدق کند. نشان دهید

$$f(x) = f'(\circ) x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

مسئله ۶۱. تمرین شماره ۸ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۲ کتاب آدامز:

آ) فرض کنید f در x مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید

$$\text{(i)} \qquad \lim_{h\to\circ} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x),$$

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{h\to\circ} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

ب) نشان دهید وجود حد (i) در فوق، مشتق‌پذیری تابع f را در نقطهٔ x نتیجه می‌دهد.

ج) نشان دهید وجود حد (ii) در فوق، مشتق‌پذیری تابع f را در نقطهٔ x نتیجه نمی‌دهد. مثلاً تابع $f(x) = |x|$ را در مبدأ در نظر بگیرید.

مسئله ۶۲. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مثال بزنید که فقط و فقط در تعدادی متناهی نقطه مشتق‌پذیر باشد.

مسئله ۶۳. یک تابع مثال بزنید که در یک نقطه مشتق صفر داشته باشد ولی در آن نقطه اکسترمم موضعی نباشد. (منظور از نقطهٔ اکسترمم یعنی نقطهٔ ماکسیمم و یا مینیمم.)

مسئله ۶۴. یک تابع مثال بزنید که در یک نقطه اکسترمم موضعی باشد ولی مشتق در آن نقطه موجود نباشد.

مسئله ۶۵. فرض کنید I بازهٔ باز (α,β) باشد. نشان دهید اگر $f:I\to\mathbb{R}$ در $a\in I$ دارای مشتق مثبت باشد، آن‌گاه یک $\delta>0$ موجود است به‌طوری‌که

$$f(x)<f(a)\quad \forall x\in(a-\delta,a)\cap I \quad \text{و} \quad f(x)>f(a)\quad \forall x\in(a,a+\delta)\cap I.$$

مسئله ۶۶. نشان دهید اگر f روی $(-1,1)$ پیوسته، روی $(-1,0)\cup(0,1)$ مشتق‌پذیر، و $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=L$، آن‌گاه f در $x=0$ نیز مشتق‌پذیر است و $f'(0)=L$.

مسئله ۶۷. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق آن به‌جز احتمالاً در تعدای متناهی نقطه موجود و برابر صفر است. نشان دهید f تابع ثابت است.

مسئله ۶۸. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و روی $I=(a,b)$ مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید f اکیداً صعوی است اگر و فقط اگر $f'(x)\geq 0$ برای هر $x\in I$ و f' بر هیچ زیر بازهٔ باز از I متحد صفر نباشد.

مسئله ۶۹. نشان دهید $f(x)=x+\cos x$ تابعی صعودی اکید است.

مسئله ۷۰. فرض کنید $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ پیوسته، $f(0)=0$، $f'(x)$ برای هر $x>0$ موجود، و f' روی $(0,+\infty)$ صعودی باشد. نشان دهید $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ صعودی است.

مسئله ۷۱. آ) فرض کنید $I=(a,b)$ و توابع $f,g:I\to\mathbb{R}$ پیوسته و روی I مشتق‌پذیر باشند. به‌علاوه فرض کنید $f(a)=g(a)$ و $g'(x)\geq f'(x)$ برای هر $x\in I$، و برابری روی هیچ زیر بازهٔ باز I رخ ندهد. در این‌صورت نشان دهید

$$g(x)>f(x)\qquad \forall x\in I.$$

ب) به‌کمک قسمت قبل ثابت کنید برای هر $x \in (۰, \frac{\pi}{۲})$ داریم

$$x < \tan x < x + \frac{x^۳}{۳}.$$

مسئله ۷۲. فرض کنید f روی $[۰, +\infty)$ پیوسته و روی $(۰, +\infty)$ مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(۰) = ۰$ و $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ برای هر $x > ۰$ و یک $A > ۰$، ثابت کنید f متحد صفر است.

مسئله ۷۳. فرض کنید f روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(a) = m$ و $\sup_{x \in (a,b)} |f'(x)| \leq K < +\infty$ ، یک کران بالا برای $f(b)$ ارائه دهید.

مسئله ۷۴. فرض کنید f روی بازهٔ باز I مشتق‌پذیر و هیچ اکسترمم موضعی نداشته باشد. نشان دهید f یا صعودی است و یا نزولی.

مسئله ۷۵. فرض کنید f روی $(۰, +\infty)$ دوبار مشتق‌پذیر باشد و $f''(x) \geq ۱$ برای هر $x \in (۰, +\infty)$. نشان دهید f از بالا بی‌کران است.

مسئله ۷۶. اگر $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \neq ۰$ و $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = ۰$، به‌کمک قضیهٔ مقدار میانگین، مقدار حد تابع $\sqrt[۳]{f(x+۱)} - \sqrt[۳]{f(x)}$ را در مثبت بی‌نهایت بیابید.

مسئله ۷۷. فرض کنید $\alpha > ۱$ و f در شرط $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\alpha}$ برای هر x و y صدق می‌کند. نشان دهید f تابع ثابت است.

مسئله ۷۸. آ) فرض کنید $f''(x)$ روی $\mathbb{R}$ موجود و پیوسته باشد و به‌علاوه برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$|f''(x)| \leq K$. نشان دهید

$$\left|\frac{f(x+h)+f(x-h)-۲f(x)}{h^۲}\right| \leq K.$$

ب) فرض کنید f در همسایگی x تعریف شده و $f''(x)$ موجود باشد. نشان دهید

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)+f(x-h)-۲f(x)}{h^۲} = f''(x).$$

ج) نشان دهید $f(x) = x|x|$ در $x = ۰$ دوبار مشتق‌پذیر نیست ولی مقدار حد فوق وجود دارد.

مسئله ۷۹. فرض کنید $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$ باشد. نشان دهید $c > a$ وجود دارد به‌طوری‌که $f'(c) = ۰$.

مسئله ۸۰. فرض کنید توابع $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته و روی (a, b) مشتق‌پذیر باشند. اعمال قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع حقیقی مقدار

$$F(x) = \det\begin{bmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{bmatrix}$$

چه نتیجه‌ای می‌دهد؟ نشان دهید حالت خاص $h(x) \equiv ۱$، قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته است.

مسئله ۸۱. فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته، روی (a, b) مشتق‌پذیر و $a > ۰$ باشد. نشان دهید $x_۱ \in (a, b)$ موجود است به‌طوری‌که

$$\frac{bf(a)-af(b)}{b-a} = f(x_۱) - x_۱ f'(x_۱).$$

(راهنمایی: توابع $\frac{f(x)}{x}$ و $\frac{۱}{x}$ را در نظر بگیرید و از قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته استفاده کنید.)

مسئله ۸۲. نشان دهید چندجمله‌ای

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^۲-۱)^n$$

دقیقاً n ریشه متمایز در بازهٔ $(-۱,۱)$ دارد.

مسئله ۸۳. تابع $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ روی $(a,+\infty)$ مشتق دوم دارد. اگر $f(a)>۰$، $f'(a)<۰$ و برای هر $x>a$ داشته باشیم $f''(x)\leq ۰$. ثابت کنید معادلهٔ $f(x)=۰$ دقیقاً یک ریشه دارد.

مسئله ۸۴. فرض کنید توابع مشتق‌پذیر $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به‌گونه‌ای باشند که $f'g-fg'$ هرگز صفر نشود. ثابت کنید بین هر دو ریشهٔ f یک ریشه از g وجود دارد.

مسئله ۸۵. تابع $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر است و

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=۰.$$

ثابت کنید حداقل یک نقطه مانند $c\in(a,+\infty)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f''(c)=۰$.

مسئله ۸۶. تابع مشتق‌پذیر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به‌گونه‌ای است که

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l_۱,\qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x)=l_۲$$

که در آن $l_۱$ و $l_۲$ دو عدد حقیقی هستند. ثابت کنید $l_۲=۰$.

مسئله ۸۷. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر است و

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l_۱,\qquad \lim_{x\to+\infty} f''(x)=l_۲$$

که در آن $l_۱$ و $l_۲$ دو عدد حقیقی هستند. ثابت کنید $l_۲=۰$.

مسئله ۸۸. نشان دهید $y=\tan x$ روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ خودش و وارونش بینهایت‌بار مشتق‌پذیر هستند و

$$\left(\tan^{-۱}\right)'(x)=\frac{۱}{۱+x^{۲}} \qquad \forall x\in(-\infty,+\infty).$$

مسئله ۸۹. نشان دهید توابع $f(x)=\tan^{-۱}x$ و $g(x)=\tan^{-۱}\frac{۱+x}{۱-x}$ روی $(-\infty,۱)$ در حد تفاضل با یک عدد ثابت اختلاف دارند.

مسئله ۹۰. فرض کنید f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید حداقل برای یک عدد حقیقی x، $f(x)f'(x)<۱$ می‌باشد.

مسئله ۹۱. فرض کنید f روی (a,b) مشتق‌پذیر، $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$، $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ و $f'(x)+f^{۲}(x)+۱\geq ۰$ برای هر $x\in(a,b)$ برقرار باشد. نشان دهید $b-a\geq\pi$.

مسئله ۹۲. فرض کنید $f''(x)$ روی $\mathbb{R}$ موجود و پیوسته، $f''>۰$ و $f+f'>۰$ باشد. نشان دهید $f>۰$.

مسئله ۹۳. تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ به‌گونه‌ای است که $f+f''>۰$، $f(a)=f(b)$ و $f>۰$. نشان دهید $b-a\geq\pi$.

مسئله ۹۴. اگر f تابعی مشتق‌پذیر روی $[۰,۱]$، $f(۰)=۰$ و $f(۱)=۱$، نشان دهید که $x_۱$ تا x_n متمایز در $(۰,۱)$ وجود دارند که $\sum\limits_{i=۱}^{n}f'(x_i)=n$.

مسئله ۹۵. اگر f تابعی مشتق‌پذیر روی $[۰,۱]$، $f(۰)=۰$ و $f(۱)=۱$، نشان دهید که $x_۱$ تا x_n متعلق به $(۰,۱)$ وجود دارند که $\sum\limits_{i=۱}^{n}\frac{۱}{f'(x_i)}=n$.