با یاد او

سری اوّل تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک

مسئله ۱. به استقراء ثابت کنید

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}.$$

مسئله ۲. فرض کنید روی مجموعهٔ همه زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی، رابطه ترتیب زیر را تعریف کنیم:

$$A \leq B \qquad \Longleftrightarrow \qquad B \subset A.$$

اگر C و D زیر مجموعه‌هایی دلخواه از $\mathbb{R}$ باشند و $M = \{C, D\}$، نشان دهید

$$\sup M = C \cap D \qquad , \qquad \inf M = C \cup D.$$

مسئله ۳. فرض کنید به‌ازای هر x که در $b < x$ صدق کند، داریم $a \leq x$. نشان دهید $a \leq b$. (راهنمایی: از برهان خلف استفاده کنید و مقدار x را برابر با میانگین a و b در نظر بگیرید.)

مسئله ۴. جمله زیر را شرح دهید.

«هر حکمی در مورد اعداد حقیقی را باید به‌کمک این اصل که هر مجموعهٔ ناتهی و از بالا کراندار، در مجموعه اعداد حقیقی سوپریمم (کوچکترین کران بالا) دارد، ثابت کرد.»

این اصل چه نام دارد؟ شهود شما از این اصل چیست؟

مسئله ۵. آ) نشان دهید $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

ب) نشان دهید مجموعهٔ

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x^۲ \leq ۳\right\}$$

به عنوان زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی، ناتهی و از بالا کراندار است. نشان دهید مجموعهٔ A ماکسیمم ندارد ولی سوپریمم آن برابر با $\sqrt{۳}$ است.

مسئله ۶. با استفاده از اصل تمامیت مجموعهٔ اعداد حقیقی نشان دهید به‌ازای هر عدد حقیقی مثبت x، عدد حقیقی یکتای مثبتی مانند y موجود است به‌طوری‌که $y^۲ = x$.

مسئله ۷. فرض کنید $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\sqrt[۵]{۳} < x \leq ۲\right\}$.

آ) نشان دهید A ناتهی و از بالا کراندار است و در نتیجه سوپریمم آن وجود دارد. سوپریمم A را بیابید. چه ارتباطی بین ماکسیمم A، با سوپریمم آن وجود دارد؟

ب) نشان دهید A ناتهی و از پایین کراندار است و در نتیجه اینفیمم آن وجود دارد. اینفیمم A را بیابید. آیا مینیمم A وجود دارد؟

مسئله ۸. فرض کنید $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| ۰ \leq x^۲ < ۵\right\}$.

آ) نشان دهید A ناتهی و از بالا کراندار است. مجموعهٔ کران‌های بالای A را بیابید. کوچکترین کران بالای A (یا همان سوپریمم A) چیست؟ آیا A ماکسیمم دارد؟

ب) نشان دهید A ناتهی و از پایین کراندار است. ماکسیمم مجموعهٔ کران‌های پایین A (یعنی همان اینفیمم A) را بیابید. نشان دهید مینیمم A وجود دارد و برابر با اینفیمم آن است؟

مسئله ۹. آ) نشان دهید مجموعه $A = \left\{\frac{n}{n^۲+۱} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ از (بالا و پایین) کراندار است و سوپریمم و اینفیمم آن را بیابید.

ب) نشان دهید مجموعه $A = \left\{\frac{x}{x^۲+۱} \middle| x > ۰, x \in \mathbb{R}\right\}$ از (بالا و پایین) کراندار است و سوپریمم و اینفیمم آن را بیابید.

ج) فرض کنید $B = \left\{\frac{p}{p^۲+۱} \middle| p \text{ عدد اول بزرگ‌تر از سه}\right\}$ باشد. سوپریمم و اینفیمم آن را در صورت وجود بیابید.

مسئله ۱۰. فرض کنید $A = \left\{n + \frac{(-۱)^n}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ باشد. سوپریمم و اینفیمم آن را بیابید.

مسئله ۱۱. اگر A زیرمجموعه‌ای ناتهی و کراندار از اعداد حقیقی باشد به‌طوری‌که $\sup A = \inf A$، چه چیزی در مورد مجموعهٔ A می‌توان گفت؟

مسئله ۱۲. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی باشد و $b \in \mathbb{R}$. در این‌صورت $b = \sup A$ اگر و فقط اگر b یک کران بالا برای A باشد و برای هر $\epsilon > ۰$ داده شده، $a \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که $b - \epsilon < a$.

مسئله ۱۳. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی ناتهی و از بالا کراندار در $\mathbb{R}$ باشند. قرار دهید $A + B := \left\{x + y \middle| x \in A, y \in B\right\}$، $-A := \left\{-x \middle| x \in A\right\}$، $A^۲ := \left\{x^۲ \middle| x \in A\right\}$ و $|A| := \left\{|x| \middle| x \in A\right\}$. نشان دهید

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B,$$
$$\inf(-A) = -\sup(A),$$
$$\sup(A^۲) = (\sup |A|)^۲.$$

مسئله ۱۴. فرض کنید A مجموعه‌ای ناتهی و کراندار از اعداد حقیقی باشد. نشان دهید

$$\sup\{|x-y| \,|\, x,y\in A\} = \sup\{x-y \,|\, x,y\in A\} = \sup A - \inf A.$$

مسئله ۱۵. فرض کنید $A\subset(۰,+\infty)$ مجموعه‌ای ناتهی و از بالا کراندار باشد. نشان دهید

$$\inf\{x^{-۱} \,|\, x\in A\} = \frac{۱}{\sup A}.$$

مسئله ۱۶. آ) فرض کنید $f,g:\mathbb{R}\to[-۱,۱]$ دو تابع باشند. نشان دهید

$$\inf\{f(x) \,|\, x\in\mathbb{R}\} + \inf\{g(x) \,|\, x\in\mathbb{R}\} \le \inf\{f(x)+g(x) \,|\, x\in\mathbb{R}\}.$$

آیا می‌توانید دو تابع مثال بزنید که در عبارت فوق حالت تساوی رخ ندهد؟

ب) نامساوی مشابهی برای سوپریمم بیان و ثابت کنید.

مسئله ۱۷. فرض کنید $\{A_i\}_{i=۱}^{\infty}$ خانواده‌ای ناتهی از اعداد حقیقی در $\mathbb{R}$ باشد. اگر $A=\bigcup_{i=۱}^{\infty}A_i$ از بالا کراندار باشد، نشان دهید

$$\sup A = \sup\{\sup A_i \,|\, i=۱,۲,\cdots\}.$$

مسئله ۱۸. آ) اصل ارشمیدس اعداد حقیقی را که بیان می‌کند برای هر عدد حقیقی x، یک عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که $n>x$، ثابت کنید. (راهنمایی: از اصل تمامیت اعداد حقیقی استفاده کنید.)

ب) فرض کنید $I_n=[n,+\infty)$ باشد. نشان دهید $\bigcap_{n=۱}^{\infty} I_n=\varnothing$. (راهنمایی: از اصل ارشمیدس استفاده کنید.)

ج) فرض کنید $J_n=[-\frac{۱}{n},+\infty)$ باشد. نشان دهید $\bigcap_{n=۱}^{\infty} J_n\neq\varnothing$.

د) فرض کنید $K_n=(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n})$ باشد. نشان دهید $\bigcap_{n=۱}^{\infty} K_n=\{۰\}$.

مسئله ۱۹. آ) فرض کنید $A_n=[a_n,b_n]$، و شمول‌های $A_{n+۱}\subset A_n$ برقرار باشد. نشان دهید $\bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n\neq\varnothing$.

این مطلب که اشتراک هر دنباله نزولی از بازه‌های بسته و کراندار، ناتهی است به اصل بازه‌های انقباضی (در اعداد حقیقی) معروف است.

ب) نشان دهید اصل بازه‌های انقباضی معادل با اصل تمامیت اعداد حقیقی است.