معادلات دیفرانسیل **(بهار ۱۴۰۰)**

تمرین سری هفتم و هشتم

مدرسان: دکتر مقدسی، دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین ۱

در مساله مقدار اولیه زیر ابتدا جواب معادله همگن و سپس جواب معادله ناهمگن را با استفاده از روش ضرائب نامعین به دست آورید.

$$y'' + ۲y' + ۵y = ۴e^{-t}\cos ۲t, \quad y(۰) = ۱, \quad y'(۰) = ۰$$

تمرین ۲

معادله دیفرانسیل $ay'' + by' + cy = g(t)$ را در نظر بگیرید که در آن $a, b, c > ۰$ هستند.

آ) اگر $Y_۱(t)$ و $Y_۲(t)$ جواب معادله بالا باشند. رفتار تابع $Y_۱(t) - Y_۲(t)$ در $t \to \infty$ چگونه می‌باشد؟

ب) اگر $g(t) = d$ تابع ثابت باشد. ثابت کنید که هر جواب معادله بالا وقتی $t \to \infty$ به $\frac{d}{c}$ میل می‌کند. اگر $c = ۰$ چه اتفاقی می‌افتد؟ اگر b هم صفر باشد چطور؟

تمرین ۳

در این تمرین به روش دیگری برای حل معادله دیفرانسیل $y'' + by' + cy = (D^۲ + bD + c)y = g(t)$ می‌پردازیم که در آن D عملگر مشتق نسبت به t می‌باشد.

آ) ثابت کنید معادله بالا را می‌توان بصورت تجزیه شده $(D - r_۱)(D - r_۲)y = g(t)$ نوشت که در آن $r_۱ + r_۲ = -b$ و $r_۱ r_۲ = c$.

ب) فرض کنید $u = (D - r_۲)y$ ، واضح است می‌توان با حل دو معادله به شکل $(D - a)v = g(t)$ جواب معادله درجه دوم را به دست آوریم. برای حل معادلات مرتبه اول به شکل بالا از قضیه شیفت نمایی استفاده می‌کنیم. آن را برای معادلات مرتبه اول ثابت کنید یعنی ثابت کنید:

$$(D - a)(e^{at}u) = e^{at}Du.$$

ج) با استفاده از دو قسمت قبل جواب معادله ناهمگن $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2t$

تمرین ۴

ابتدا نشان دهید که $y_1(t) = t$ و $y_2(t) = te^t$ جواب‌های همگن معادله $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 3t^3$ ، $t > 0$ می‌باشند، سپس یک جواب خاص این معادله را بیابید

تمرین ۵

سه جواب معادله خطی مرتبه دوم $L[y] = g(t)$ به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\psi_1(t) = 3e^t + e^{t^2}, \quad \psi_2(t) = 7e^t + e^{t^2}, \quad \psi_3(t) = 5e^t + e^{-t^3} + e^{t^2}.$$

جواب مساله مقدار اولیه زیر را بیابید: $L[y] = g(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

تمرین ۶

فرض کنید یکی از جواب‌های معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ تابع $(t^2 + 1)$ باشد و رونسکین هر دو جواب معادله ثابت باشد. جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 1 + t$$

تمرین ۷

ثابت کنید جواب‌های مساله مقدار اولیه

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0.$$

را می‌توان به‌صورت $y = u(t) + v(t)$ نوشت که در آن u و v جواب‌های دو مساله مقدار اولیه

$$\begin{aligned} L[u] &= 0, \quad u(t_0) = y_0, \quad u'(t_0) = y'_0 \\ L[v] &= g(t), \quad v(t_0) = 0, \quad v'(t_0) = 0 \end{aligned}$$

هستند. به عبارت دیگر غیرهمگن بودن در معادله دیفرانسیل و در مقادیر اولیه را می‌توان به صورت مجزا بررسی کرد.

تمرین ۸

آ) با انتخاب کران پایینی انتگرال در معادله نهایی جواب‌ها در روش تغییر پارامتر به عنوان نقطه اولیه t_0، ثابت کنید $Y(t)$ تبدیل می‌شود به

$$Y(t)\int_{t_0}^{t}\frac{y_1(s)y_2(t)-y_1(t)y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s)-y_1'(s)y_2(s)}g(s)ds.$$

سپس ثابت کنید $Y(t)$ جوابی از مساله مقدار اولیه

$$L[y]=g(t),\quad y(t_0)=0,\quad y'(t_0)=0.$$

می‌باشد. بنابراین $Y(t)$ را می‌توان v در مساله قبل فرض کرد.

ب) ثابت کنید جواب مساله مقدار اولیه

$$y''+y=g(t),\quad y(t_0)=0,\quad y'(t_0)=0.$$

عبارت است از $y=\int_{t_0}^{t}\sin(t-s)g(s)ds$

ج) ثابت کنید جواب مساله مقدار اولیه

$$L[y]=(D^2+bD+c)y=g(t),\quad y(t_0)=0,\quad y'(t_0)=0$$

که در آن $b^2-4c>0$ می‌باشد برابر $y(t)=\int_{t_0}^{t}K(t-s)g(s)ds$ می‌باشد که تابع K تنها به جواب‌های معادله همگن بستگی دارد. به انتگرال بالا پیچش [1] K و g می‌گوییم.

تمرین ۹

وزنه‌ای با وزن $100g$ طول فنر را به اندازه $5cm$ اضافه می‌کند. اگر وزنه از حالت تعادلیش با سرعت $10\frac{cm}{s}$ رو به پایین به حرکت درآید و اگر هیچ میرایی‌ای موجود نباشد، موقعیت u را در هر زمان t تعیین کنید. وزنه در چه زمانی برای بار اول به حالت تعادلیش برمی‌گردد؟

تمرین ۱۰

مداری سری یک خازن با ظرفیت $0{,}25\times10^{-6}F$ و یک القاگر با مقدار $1H$ دارد. اگر بار اولیه روی خازن $10^{-6}C$ باشد و هیچ جریان اولیه‌ای موجود نباشد، بار Q روی خازن را در هر زمان t بیابید.

تمرین ۱۱

فرض کنید دستگاهی که با معادله $mu''+\gamma u'+ku=0$ توصیف شده یا به طور بحرانی میرا و یا فوق میرا باشد. ثابت کنید مستقل از شرایط اولیه، وزنه حداکثر یک‌بار می‌تواند از موقعیت تعادلیش عبور کند.

[1] convolution

تمرین ۱۲

فرض کنید دستگاهی که با معادله $mu'' + \gamma u' + ku = 0$ توصیف شده به طور بحرانی میرا باشد و شرایط اولیه آن $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$ باشد.اگر $v_0 = 0$ ، ثابت کنید که وقتی $t \to \infty$ ، $u \to 0$ ، اما هرگز u صفر نیست. اگر u_0 مثبت باشد، شرطی روی v_0 بگذارید که گذر جرم از موقعیت تعادلیش را پس از رها شدن تضمین کند.

تمرین ۱۳

در دستگاه فنر-وزنه، ثابت فنر برابر $3\frac{N}{m}$ است. جرمی با وزن $2Kg$ به آن متصل شده و حرکت در شاره چسبنده‌ای صورت می‌گیرد که مقاومتی ایجاد می‌کند که به طور عددی با اندازه سرعت لحظه‌ای برابر است. اگر سیستم با نیروی خارجی $(3\cos 3t - 2\sin 3t)$ به حرکت درآید، پاسخ پایدار را تعیین کنید. جواب خود را بصورت $R\cos(\omega t - \delta)$ بیان کنید.