

## تمرین سری ششم

مدرس‌ان: دکتر مقدسی، دکتر جمالی، دکتر مستفید

## تمرین ۱

به فرض تابع‌های  $y_1$  و  $y_2$  مجموعه‌ای اساسی از جواب‌های معادله  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$  را تشکیل بدهند که در آن  $p$  و  $q$  توابعی پیوسته هستند. ثابت کنید بین هر دو ریشه متوالی  $y_1$ ، یک و تنها یک ریشه از  $y_2$  موجود است.

## تمرین ۲

با تغییر متغیر مناسب ابتدا معادله زیر را به یک معادله خطی با ضرائب ثابت تبدیل کرده و سپس آن را حل کنید.

$$t^2 y'' - 4ty' + 15y = 0$$

## تمرین ۳

آ) در این مساله به دنبال تعیین شرایطی بر روی  $p$  و  $q$  در معادله  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$  هستیم که با تغییر متغیر مناسبی معادله به معادله‌ای با ضرائب ثابت تبدیل شود. فرض کنید  $x = u(t)$  متغیر مستقل جدیدی باشد که رابطه بین  $x$  و  $t$  بعداً مشخص می‌شود. تبدیل شده معادله دیفرانسیل اولیه را با استفاده از این تغییر متغیر به دست آورید.

ب) با فرض  $q(t) > 0$  سعی کنید در معادله جدید ضریب  $y$  را ثابت مثلاً یک بگیرید به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟ (یعنی برای برقراری این فرض چه عبارتی باید برقرار باشد؟)

ج) اگر  $q(t) < 0$  باشد این نتیجه چطور باید اصلاح شود؟

## تمرین ۴

تمرین سری ششم

(آ) معادله  $y'' + 2ay' + a^2y = 0$  را در نظر بگیرید، ثابت کنید  $-a$  ریشه معادله مشخصه است در نتیجه جواب معادله  $e^{-at}$  است.

(ب) با استفاده از فرمول آبل ابتدا رانکسین هر دو جواب معادله را به دست آورید سپس با استفاده از رانکسین جواب دیگری را بیابید که با  $e^{-at}$  تشکیل جواب اساسی می دهند.

(ج) روش قسمت قبل را برای معادله دیفرانسیل  $(t-1)y'' - ty' + y = 0$  بر روی بازه  $t > 1$  با استفاده از جواب  $y_1(t) = e^t$  برای پیدا کردن جواب اساسی به کار ببندید.

**تمرین ۵**

مساله مقدار اولیه

$$16y'' + 24y' + 9y = 0, \quad y(0) = a > 0, \quad y'(0) = 1$$

را در نظر بگیرید.

(آ) مساله را حل کنید.

(ب) مقدار بحرانی  $a$  را بیابید، که جوابهایی را که منفی می شوند از جوابهای همواره مثبت جدا می کند.

**تمرین ۶**

ابتدا تحقیق کنید که  $y_1(t) = \sin t$  یک جواب برای معادله  $ty'' - y' + 4t^2y = 0$  روی  $t > 0$  می باشد. سپس جواب مستقل خطی دیگری را با استفاده از کاهش مرتبه پیدا کنید.

**تمرین ۷**

این مساله رفتار حدی جوابهای معادله  $ay'' + by' + cy = 0$  هنگامی که  $t \rightarrow \infty$  را بررسی می کند.

(آ) اگر  $a, b, c$  ثابتهای مثبت باشند. آنگاه همه ی جوابها در  $t \rightarrow \infty$  به صفر میل می کنند.

(ب) اگر  $a, c > 0$  اما  $b = 0$  رفتار جواب در  $t \rightarrow \infty$  چگونه است؟

(ج) اگر  $a, b > 0$  اما داشته باشیم  $c = 0$  آنگاه در  $t \rightarrow \infty$  جوابها به مقدار ثابتی میل می کنند که وابسته به شرایط اولیه است. این ثابت را برای یک شرط اولیه دلخواه به دست آورید.