

تمرین سری سیزدهم

مدرس: دکتر مقدسی، دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین ۱

تبدیل لاپلاس توابع داده شده را محاسبه کنید. سعی کنید در این محاسبه به جای استفاده مستقیم از تعریف، تا جای ممکن توابع را بصورت توابع شناخته شده در جدول لاپلاس تبدیل کنید و سپس تبدیل لاپلاس آن‌ها را محاسبه کنید. در آخر هریک از توابع داده شده را رسم کنید.

(آ)

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$f(t) = |\sin(t)|, \quad t \geq 0 \quad (\text{ب})$$

تمرین ۲

لاپلاس وارون توابع زیر را محاسبه کنید:

$$F(s) = \frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2 - 2s + 2} \quad (\text{آ})$$

$$F(s) = \frac{(s-2)e^{-s}}{s^2 - 4s + 3} \quad (\text{ب})$$

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} \quad (\text{ج})$$

تمرین ۳

(آ) فرض کنید $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ برای $0 < a < s$ ، موجود باشد. درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as+b)\} = \frac{1}{a} e^{-\frac{bt}{a}} f\left(\frac{t}{a}\right).$$

تمرین سری سیزدهم

ب) با استفاده از قسمت قبل لاپلاس وارون توابع زیر را محاسبه کنید:

$$F(s) = \frac{2s + 1}{4s^2 + 4s + 5}, \quad F(s) = \frac{e^2 e^{-4s}}{2s - 1}.$$

تمرین ۴

جواب مساله مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

$$y'' + 2y' + 3y = \sin(t) + \delta(t - 4\pi), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

تمرین ۵

جواب مساله‌های مقدار اولیه زیر را بصورت انتگرال پیچش به دست آورید:

$$y'' + y' + \frac{4}{5}y = 1 - u_\pi(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \quad (a)$$

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(\alpha t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (b)$$