معادلات دیفرانسیل (بهار ۱۴۰۰)

تمرین سری دوازدهم

مدرسان: دکتر مقدسی، دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین ۱

با استفاده از انتگرال گیری جز به جز تبدیل لاپلاس تابع te^{at} را به دست آورید.

تمرین ۲

آ) به ازای چه مقادیری از p تبدیل لاپلاس t^p وجود دارد؟

ب) با فرض $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ تبدیل لاپلاس $t^{\frac{-1}{2}}$ را به دست آورید.

تمرین ۳

لاپلاس معکوس هر یک از توابع زیر را بیابید.

آ) $F(s) = \frac{2s+1}{s^2-2s+2}$

ب) $F(s) = \frac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$

تمرین ۴

جواب مسائل مقدار اولیه زیر را بیابید.

آ)

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$$

ب)

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

ج)

$$y'' + ۴y = \begin{cases} t^۲ & ۰ \le t < ۱ \\ ۱ & ۱ \le t \end{cases}, \quad y(۰) = y'(۰) = ۰.$$

تمرین ۵

سری تیلور تابع $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & t \neq ۰ \\ ۱ & t = ۰ \end{cases}$ حول نقطه $t = ۰$ بیابید. سپس با فرض اینکه می‌توان تبدیل لاپلاس را جمله به جمله محاسبه کرد، نشان دهید تبدیل لاپلاس این سری تیلور برابر $\arctan(\frac{۱}{s})$ برای $s > ۱$ است.

تمرین ۶

آ) فرض کنید تابع $f(t)$ در شرایط قضیه وجود تبدیل لاپلاس صدق می‌کند و $F(s) = \int_۰^\infty e^{-st} f(t)dt$ باشد، نشان دهید:

$$F^{(n)}(s) = L\{(-t)^n f(t)\}$$

ب) با استفاده از قسمت قبل تبدیل لاپلاس تابع $t^۲ e^{at}$ را محاسبه کنید.